



المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم
إدارة العلوم

الاعمال الرياضية لبهاء الدين العاملي

تحقيق وشرح وتحليل
الدكتور جلال شوقي

الأستاذ بكلية الهندسة
جامعة القاهرة

دار الشروق

١٩٨١

مقدمة

يرجع الفضل إلى العرب - بغير منازع - في إرساء أصول وقواعد عِلْمِي الحساب والجبر ، وتعليمهما للعالم أجمع ، فالأرقام الشائعة الاستعمال في عصرنا الحالى تُعرف بالأرقام العربية ، كذلك فإن كلمة « جبر » قد دخلت معظم اللغات الحية للدلالة على هذا العلم الذى وَضَعَ أولَ كتابٍ فيه عالِمُنَا العربى الفذُّ محمد بن موسى الخوارزمى فى القرن التاسع للميلاد ، وهو أيضًا أول من كتب فى الحساب العربى ، وهذان الكتابان هما الأساس الذى شُيِّدَ عليه صرْحُ الرياضيات من بعده .

وقد زحرت الحضارة العربية بعشرات من علماء الرياضيات الذين قدموا للعالم عدة مئات من المؤلفات القيِّمة لا زالت الغالبية العظمى منها أسيرة خزانات المخطوطات ، هذا لما قُدِّرَ لها البقاء إلى وقتنا الحاضر . ومن المؤسف حقاً أن الكثير من المخطوطات العربية قد ضاع أو تلف عبر القرون بسبب الحروب والغزوات والمحن ، الأمر الذى جعل قضية تأريخ العلوم الرياضية عند العرب أمراً ليس بالهين اليسير .

ولقد دار بخلدى أن أقدم دراسة لأحد الرياضيين العرب ممن كانت له فرصة التجوال والاطلاع على الآثار العلمية لمن سبقه من علماء العرب . ومن ثمَّ فقد يكون من الممكن أن ننقل عنه صورة دقيقة لما وصلت إليه علوم الحساب والجبر والمقابلة وأعمال المساحة قرب نهاية الحضارة العربية التى امتدت زهاء ثمانية قرون . وبعد درس وتنقيب وتمحيص استقر رأى على أن أقوم بتحقيق آثار الشيخ بهاء الدين العاملى فى الرياضيات ، فالشيخ من علماء النصف الثانى من القرن السادس عشر وأوائل القرن السابع عشر ، وقد عُرفَ عنه شغفه الشديد بالعلم ، وتعدُّدُ أسفاره التى استمرت ثلاثين عامًا ، جاب خلالها المنطقة الممتدة من مصر جنوبًا وغربًا حتى أصفهان شمالاً

وشرقًا ، ولا بد أن يكون الشيخ العاملى قد اطلع فى أسفاره هذه على كتب المتقدمين ، ومنها ما قد يكون ضل طريقه إلينا ، وقد وجدت أن العاملى قد ألّف كتابًا لخص فيه الحساب والجبر وأعمال المساحة على عصره ، وقدم هذه المعلومات فى صورة مُرَبَّبة كل الغريب واضحة كل الوضوح ، وشاءت الصدفة الحسنة أن أعثر على ست مخطوطات لكتابه هذا المُسمّى : « خلاصة الحساب » فى مكثبات مدينة حلب الشهباء أثناء تواجدى بها أسنًا مُعارًا لجامعتها ، فعقدت العزم على تحقيق هذا الكتاب للعاملى لاسيما وأنى لم أجد فى فهارس معهد المخطوطات العربية بالقاهرة ما يدل على وجود مخطوط أو مُصوّر لهذا الكتاب ضمن مقتنياته .

هذا وقد تبين لى أثناء التحقيق أن الكتاب قد لخص - بعناية ودقة - الطرق الحسابية والجبرية المعروفة على عهده ، وأورد العديد من الأمثلة ، وبيّن أنواع المعادلات وطرائق حلها ، كذا المسائل المستعصية الحل ، كما قدّم عدّة قواعد وفوائد لتسهيل أعمال الحاسب ، ونحن لم نعرض لهذا التحقيق ظنًا منا أنّنا نعرض لفضل العاملى فى الرياضيات ، وإنّا نقدم الكتاب باعتباره عَرْضًا - فى المقام الأول - لعلوم الحساب والجبر والمساحة ومفاهيم العلماء العرب وطرائقهم فيها فى القرن الأخير من الحضارة العربية . بهذا المضمون أقبلنا على هذه المهمة مُفضّلينها على أن نكتب من عندنا تاريخًا للعلوم الرياضية عند العرب ، وذلك حتى يتم تحقيق ونشر الجانب الأكبر من المخطوطات العربية فى هذا المجال ، فتكون كتابة التاريخ عن المصادر العربية الأصيلة لا عن آراء واجتهادات متفرقة من الشرق والغرب .

وقد وجدنا إتمامًا للفائدة أن نعرض بالدراسة للمسائل الحسابية والجبرية المتنوعة التى ساقها الشيخ بهاء الدين العاملى فى كتاب آخر له يُعرف بكتاب « الكشكول » ، ألّفه أثناء تواجده بمصر ، فقدّمناها مشروحة وذلك بعد انتهاء تحقيقنا لكتاب « خلاصة فى الحساب والجبر والمقابلة » ، وكان بوجدنا أن نحصل على نسخة من مخطوط أشار إليه العاملى فى كتابه هذا وسمّاه « بحر الحساب » ، وهو كتاب كان يؤلفه العاملى ويأمل أن يوفقه الله لإتمامه ، إلا أنه لا يبدو أن ذلك قد تحقّق له .

أرجو بهذه الدراسة العلمية أن أكون قد وُفِّقت في تقديم صورة واضحة – على
لسان أحد علمائنا المتأخرين – لمعارف العرب في الحساب والجبر والمساحة قبل أن تأخذ
أوروبا بزمام المبادرة في مجال الرياضيات .

والله ولي التوفيق ،

جلال شوقي

كلية الهندسة – جامعة القاهرة

القاهرة في ٢١ فبراير (شباط) ١٩٧٥ .

المحتويات

صفحة

٥

١١

١٣

مقدمة

بهاء الدين العاملي

تعريف بالكتاب

القسم الأول : كتاب « الخلاصة في علم الحساب والجبر والمقابلة »

١٦

مخطوطات كتاب « خلاصة الحساب »

٢٠

مخطوطات مكتبات حلب

٢٨

محتويات كتاب « خلاصة الحساب »

٣١

متن مخطوط الخلاصة في علم الحساب والجبر والمقابلة

٣٥

الباب الأول : في حساب الصّحاح

٦٦

الباب الثاني : في حساب الكسور

٧٥

الباب الثالث : في استخراج المجهولات بالأربعة المتناسبة

٧٨

الباب الرابع : في استخراج المجهولات بحساب الخطأين

٨٢

الباب الخامس : في استخراج المجهولات بالعمل بالعكس

٨٤

الباب السادس : في المساحة

الباب السابع : فيما يتبع المساحات من وزن الأرض لإجراء القنوت ،

٩٥

ومعرفة ارتفاع المرتفعات ، وعروض الأنهار ، وأعماق الآبار

١٠٧

الباب الثامن : في استخراج المجهولات بطريق الجبر والمقابلة

الباب التاسع : في قواعد شريفة وفوائد لطيفة لا بد للمحاسب منها ، ولا غنى

١٢٧

له عنها

(وتشمل جَمْع المتواليات الحسابية ، وجَمْع المربّعات كذا

المكعبات المتوالية ، وضرب قسمة الجذور ، وقاعدة لحساب

العدد التام ، وقاعدة فرق المقدارين المربّعين) .

الباب العاشر : في مسائل متفرقة بطرق مختلفة (وتشمل مسائل في استخراج

١٤٤

المجهولات بطرق حسابية ، وطرق جبرية) .

١٦٠

خاتمة

(وتشمل سبعا من المسائل الصعبة أو المستحيلة الحل ، منها

معادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة ، ومسألتان مستحيلتا

الحل عُرِفَتَا فيما بعد بنظرية فيرما) .

تذنيب (قسمة الغرماء)

١٧٥

ملحق للرسالة : قاعدة في بيان تقسيم الغرماء

القسم الثاني : مسائل الحساب والجبر والمساحة الواردة في كتاب «الكشكول»
للعاملي :

١٨٠

١٨١

١٩٠

٢٠١

٢٠٦

١ - خواص الأعداد ، وجمع المتواليات

٢ - مسائل في علم الحساب (وتشمل المضمّرات ، والتباديل والتوافيق)

٣ - مسائل في الجبر والمقابلة

٤ - مسائل في أعمال المساحة

٢١٥

٢٢٥

٢٢٧

خلاصة

فهرس الأشكال

فهرس الأعلام

بهاء الدين العاملی^(١)

(٩٥٣ - ١٠٣١ هـ) (١٥٤٧ - ١٦٢٢ م)

هو محمد بن حسين بن عبد الصمد الملقَّب بهاء الدين الحارثي العاملی الجبعی الهمدانی ، وُلد ببعلبك^(٢) عند غروب شمس يوم الأربعاء لثلاثة عشر بقين من ذی الحجة سنة ثلاث وخمسين وتسعمائة ، وانتقل به أبوه إلى بلاد العجم ، حيث نهل من مناهل العلم ، ثم أخذ في السياحة ، فتنقلت به الأسفار إلى أن وصل إلى أصفهان ، وجاب بلادًا كثيرة فدخل مصر ، ثم قدم القدس ولزم فناء المسجد الأقصى الشريف ، ثم أقلع إلى حلب قبل أن يرجع إلى أصفهان حيث كانت وفاته لاثنتي عشرة خلون من شوال سنة إحدى وثلاثين وألف ، ونقل إلى طوس حيث دُفن فيها بجوار «الإمام رضا» .

ولَقَّب الحارثي نسبةً إلى حارث وهمدان قبيلة . أمَّا لَقَّبُ العاملی فهو نسبةً إلى جبل عاملٍ أو بني عاملة بالشام (حالياً بلبنان) .

تُنسب إلى الشيخ بهاء الدين العاملی مؤلفات كثيرة وجليلة ، منها التفسير المسمّى بالعروة الوثقى والصرائط المستقيم ، والتفسير المسمّى بعين الحياة ، والتفسير المسمّى بالحبل المتين في مزايا القرآن المبين ، ومشرق الشمسين وإكسير السعادتین ، وحاشية على أنوار التنزيل ، وتفسير وجيز ، ورسالة في وحدة الوجود ، ومفتاح الفلاح .

(١) عن ترجمة أوردها الشيخ أحمد بن علي الشهير بالمنيني (المتوفى سنة ١١٥١ هـ) في صدر شرحه لقصيدة الشيخ بهاء الدين العاملی في مدح صاحب الزمان السيد محمد المهدي - كتاب الكشكول للعاملی - طبعة المطبعة العامرة الشرفية . (مطبعة الشيخ شرف موسى) بخان أبي طاقية بمصر سنة ١٣٠٢ هـ (١٨٨٥ م) . الصفحات ٣٦٧ حتى ٣٧٠ . كذا كتاب «تاريخ الأدب العربي» لكارل بروكلمن . طبعة ليدن سنة ١٩٤٣ .

(٢) يقول ابن معصوم بولادته ببعلبك . بينما ينص الطالوي على ولادته بقزوين .

وزبدة الأصول ، وأربعون حديثاً ، ودراية الحديث أو الرسالة الوجيزة ، والجامع العباسي (فارسي) ، والحديقة الهلالية ، والرسالة الاثنا عشرية ، وهداية الأمة إلى أحكام الأئمة ، وحديقة السالكين ، وله في مجال اللغة والأدب الفوائد الصمدية في علم العربية ، وأسرار البلاغة ، وتهذيب النحو ، والمخلاة ، والكشكول ، وبعض القصائد ، ومنظومة في الموعظة ، وتهذيب البيان ، ومنظومة وسيلة الفوز ، وتوضيح المقاصد في شرح القصيدة الذهبية .

لقد تعدت مُصنَّفاتُ عالمنا الموسوعي الشيخ بهاء الدين العاملي الخمسين مُصنَّفاً ما بين كتاب ورسالة ومقال ، ولم يقتصر نشاطه الفكري على علوم الدين والأدب واللغة ، وإنَّما تعدَّى ذلك إلى مجال العلوم حيث نجد له مؤلفات قيمة في الرياضيات والفلك منها :

- ١ - خلاصة الحساب (المُسمَّى البهائية) .
- ٢ - بحر الحساب (وهو كتاب أشار إليه العاملي في عدَّة مواضع من «خلاصة الحساب» ، ووصفه بكتابه الكبير ، وتمنَّى أن يُتمَّه بعون الله وتوفيقه ، ويبدو أن هذه الأمنية لم تتحقق له) .
- ٣ - رسالة في الجبر والمقابلة .
- ٤ - تشریح الأفلاك .
- ٥ - الرسالة الحاتمية في الأسطرلاب .
- ٦ - رسالة الصفيحة (أو الصفحة) . (عن الأسطرلاب)
- ٧ - رسالة «جِهَاتُهَا» . (عن الأسطرلاب)
- ٨ - رسالة في تحقيق جهة القبلة .
- ٩ - المُلخَّص في الهيئة .
- ١٠ - رسالة كُرِّيَّة . (عن الكرة)

نتناول هنا بالدراسة - من كتب العاملي - كتاب «خلاصة الحساب» ، فنقدم تحقيقاً لفظياً وعلمياً له ، مع شروح وتحليلات رياضية لما احتواه هذا الكتاب من حساب وجبر ومقابلة ومساحة ، مُستعينين في ذلك بالمخطوطات السَّبعة الموجودة بمدينة حلب الشهباء ، كما أننا رجعنا إلى كتاب العاملي المُسمَّى «الكشكول» لدراسة ما جاء فيه من قواعد ومسائل متفرقة في الرياضيات .

تعريف بالكتاب

كتاب يبحث في تراث العرب في الرياضيات ، فيقدم دراسة علمية لكتابات الشيخ بهاء الدين العاملي في كتابه «خلاصة الحساب والجبر والمقابلة» ويعرض لرياضياته في كتابه «الكشكول» ، ويشرحها شرحًا وافيًا مدعمًا بالتحليل الرياضي الشامل .

ويمتاز الشيخ العاملي - العالم الموسوعي العربي - بأنه قد رسم صورة واضحة وصادقة لمعارف العرب الرياضية في نهاية القرن السادس عشر الميلادي بعد أن جاب الأمصار العربية والإسلامية وأطلع على أعمال العرب وفلاسفتهم زهاء ثلاثين عامًا .

ويوجد من كتاب العاملي «خلاصة الحساب» أكثر من أربعين مخطوطًا منتشرة في أرجاء العالم شرقيه وغربيه - كما يوجد له ثلاثة عشر شرحًا ، وقد تم تحقيق الكتاب من واقع ستة مخطوطات موجودة بمكتبات مدينة حلب الشهباء لم يرد ذكرها في كتب المخطوطات المختصة ، ولم يكن قد سبق نشر هذا الكتاب في العالم العربي .

يبدأ الشيخ العاملي ببيان طرائق الحساب الأساسية من جمع وتفريق وضرب وقسمة واستخراج للجذور سواء بالنسبة للأعداد الصحيحة أو للكسور ، كذا كيفية التحقق من سلامة أدائها بتطبيق قاعدة «ميزان العدد» ، تلك القاعدة التي أطلق عليها الغرب تسمية «القاعدة الذهبية» ، ويعرج العاملي بعد ذلك إلى استخراج المجهولات بطريق الأربعة المتناسبة ، كذا بطريق حساب الخطأين ثم بطريق العمل بالعكس ، وقد عرض العاملي في مجال الحساب لكيفية استخراج المضمرات عن طريق تكوين معادلة بسيطة ذات مجهول واحد ، كذلك لفكرة التباديل والتوافيق كإيجاد عدد الكلمات التي تتركب من حروف المعجم بشروط خاصة ، وأخيرًا قدم العاملي طريقة قسمة مال على جماعة من المستحقين تزيد استحقاقاتهم على المال الموجود .

ويبحث الشيخ العاملي في خواص الأعداد ، ويعرف الأعداد التامة والمتحابة والمتوافقة والمتداخلة وغيرها ، ويقدم قاعدة مبتكرة لتعيين الأعداد التامة ثبتت صحتها حتى البلايين ، وأمكن باستخدامها تعيين الأعداد التامة السبعة الأولى .

ويعرض العاملى لجمع المتواليات الرياضية ، فبين كيفية جمع الأعداد على النظم الطبيعى (وهو ما نسميه اليوم بالمتوالية الحسابية) . وجمع الأفراد دون الأزواج وعكسه ، كذا جمع المربعات المتوالية وجمع المكعبات المتوالية .

أما فى مجال الجبر والمقابلة فإن العاملى يعرف الشئ والمال والمكعب ومراتبها ، أى المقدار المجهول ومربعه ومكعبه وما فوق ذلك على التوالى . ويشرح المسائل الجبرية الست ، ويقدم حلول معادلة الدرجة الثانية ، كذلك يبين العاملى تحويل الفرق بين مربعى مقدارين إلى حاصل ضرب مجموع المقدارين فى الفرق بينهما ، كما يعرض «للمسائل السیالة» وهى تسمية أطلقها العرب على المسائل التى يصح لها عدد غير محدود من الإجابات الصحيحة .

ويسوق العاملى بابًا خاصًا لتعيين مساحات الأشكال الهندسية المستوية وحجوم الأجسام المنتظمة ، ويتناول بيان أعمال المساحة العملية وتقديم البراهين الهندسية على صحة الطرق المتبعة فيها ، فيعرض لطرق قياس فرق المنسوب بغرض شق القنوات . وطرق تعيين علو المرتفعات وأعماق الآبار ، كذا قياس ارتفاع الشمس دون أسطرلاب أو آلة ارتفاع .

ويفرد الشيخ العاملى خاتمة كتابه لسبع مسائل يسميها «المستصعبات السبع» وهى مسائل بعضها صعب وبعضها الآخر مستحيل الحل . فمنها مستصعبات تشتمل على معادلات جبرية من الدرجتين الثالثة والرابعة ، ومنها مسألان مستحيلتا الحل كمسألتى تقسيم ضعف المربع إلى مربعين وتقسيم المكعب إلى مكعبين بشرط كون المقادير كلها أعداد صحيحة ، وقد عرفت هاتان المستصعبتان فيما بعد بنظرية «فيرما» نسبة إلى العالم الفرنسى بيير دى فيرما الذى عاش فى القرن السابع عشر وذلك يثبت سبق وقوف العرب على هذه النظرية الشهيرة .

إن العاملى يقدم لنا عرضًا شاملاً تمام الشمول ، مرتبًا غاية الترتيب ، ودقيقًا كل الدقة لما ألم به العرب وأحاطوا فى مجال الرياضيات وأعمال المساحة وهو عرض غنى بفضل العرب وسبقهم فى هذا المجال . قبل أن تنتقل الصدارة فى التقدم الحضارى من الشرق إلى الغرب .

جلال شوقى

القسم الأول

كتاب

“الخلاصة في علم الحساب والجبر والمقابلة”

أو “خلاصة الحساب”

للشيخ بهاء الدين محمد بن حسين العاملي

مخطوطات كتاب «خلاصة الحساب» (البهاية) لبهاء الدين العاملي

تحتفظ خزانات الكتب في العالم - شرقيّه وغربيّه - بالعديد من مخطوطات هذا الكتاب القيم ، حيث يوجد أكثر من أربعين مخطوطاً منه ، فضلاً عن شروحه التي تعدّت العشرين مخطوطاً ، وقد طُبِعَ الكتاب ثلاث مرات . كما صدرت له ثلاث ترجمات إلى اللغات الفارسية والألمانية والفرنسية ، بيد أنه لم يُنشر في العالم العربي قبل اليوم . وبدلُ العدد الضخم من النسخ الخطيّة لهذا الكتاب على أهميته وسعة انتشاره وبالتالي كثرة الأخذ عنه . حيث إنه يقدم صورةً متكاملةً ومُرتّبةً لحالة المعارف الرياضيّة عند العرب في أواخر القرن السادس عشر الميلادي ، وتشهد الشروح العديدة للكتاب على عِظَم الاهتمام به ، ونبين فيما يلي أهم مخطوطات الكتاب وشروحه الموجودة في خزانات الكتب العامة في العالم .

● المخطوطات الموجودة في الوطن العربي

- ١ - مخطوط المكتبة الخالدية بالقدس.
- ٢ - مخطوطات الموصل (عن كتاب «مختارات الموصل» لداود الجلي الموصلی ، بغداد عام ١٩٢٧ م) - أرقام : ١٠٤/٢٩ ، ٢١٦/٦٩ ، ٦٠/١٠٣ ، ٦/١١٥/١٠٨ ، ٢٧١/١٣٧ ، ٢٠٥/١٦١ ، ١/١٤٠/١٧٩ ، ٢١٢ ، ٦/٦٩ ، ٧٣ ، ٢٤٩/٢٤١ ، ٢٨٧/٢٤٢ ، ١/١٥٠/٢٧٤ ، ٢/١٦/٢٨٨ .
- ٣ - مخطوطا مكتبة الأوقاف الإسلامية بحلب - رقم ٩١٢ ، ١٧٧٣ .
- ٤ - مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب - رقم ١٢٥٣ .
- ٥ - مخطوط المكتبة المولوية بحلب - رقم ٧٥٣ .
- ٦ - مخطوطا مكتبة مدرسة الشيخ أحمد الصديق بحلب - رقم ٦٦ ، ١٥٩ .
- ٧ - مخطوطا دار الكتب المصرية بالقاهرة : فهرست الكتب العربية المحفوظة بالكتبخانة الخديوية المصرية - المجلد الخامس ، رقم ١٨٠ - المجلد السابع ، رقم ٨٩ .

٨ - مخطوط الخزانة الآلوسية - مكتبة المتحف العراقي ببغداد - رقم ٨٧٩٢.

● المخطوطات الموجودة في آسيا وتركيا

- ١ - مخطوطات المجلس الوطني بطهران - رقم ٢/٣٩٨ ، ١٢٧٥ ، ١٣١٩ .
- ٢ - مخطوط مكتبة المشهد - رقم ٤/٥١/١٨/١٧ .
- ٣ - مخطوط مكتبة تبريز - رقم ١٢٧٦ .
- ٤ - مخطوط مكتبة أصفهان - رقم ٦٩/٧٩٦/١ .
- ٥ - مخطوط مكتبة كييف - رقم ٩٣ .
- ٦ - مخطوط مكتبة الجامعة الإسلامية - عليه - رقم ٢/١٢٠ .
- ٧ - مخطوط مكتبة بشاور - رقم ١٧٤٧ .
- ٨ - مخطوط المكتبة العامة - رامبور - رقم ٢٨١/٤١٣ ب .
- ٩ - مخطوط مكتبة بوهار - رقم ٣٥٢ . (طُبِعَ في كلكتا عام ١٨١٢ م) .
- ١٠ - مخطوط المكتبة الشرقية العامة - بنكيور - رقم ٢١٩ .
- ١١ - مخطوط مكتبة حاجي سليم أغا باستانبول - رقم ٧٢٩ ، كذا مجموع . ١٢٧٦

● المخطوطات الموجودة في أوروبا وأمريكا

- ١ - مخطوط المتحف البريطاني بلندن - رقم ٢/١٣٤٥ .
- ٢ - مخطوط المكتب الهندي بلندن - رقم ٧٥٨ .
- ٣ - مخطوط مكتبة جامعة كامبردج - ملحق براون رقم ٤٣٧ .
- ٤ - مخطوط المكتبة الملكية ببرلين الغربية - كتالوج ألواردت رقم ٥٩٩٨ .
- ٥ - مخطوط مكتبة جوتنجن بألمانيا الغربية - رقم ٦٨ .
- ٦ - مخطوط مكتبة الفاتيكان - رقم : روسياني ١٠١٣ .
- ٧ - مخطوط جامعة برنستون بأمريكا - رقم ١٦٣ .
- ٨ - مخطوطات المكتبة العامة ببيترسبرج (لينينجراد) : كتالوج عام ١٨٥٢ م -
رقم ٢٤٣ ، كتالوج روزن - رقم ٥/١٩٢٦ ب ، كتالوج كراتشكوفسكي -
رقم ٩٢٩ ، كتالوج مجموعة بخاري - رقم ٤١٩ .

• شرح الكتاب

- ١ - بهاء الدين العاملی (المُصنّف نفسه) : شرح الباب الثامن ، مخطوط المتحف البريطاني بلندن - رقم : ملحق ٧/٧٦٥ .
- ٢ - عصمت الله بن أعظم بن عبد الرسول سَهارنبوری : (أتم الشرح حوالی عام ١٠٨٦ هـ = ١٦٧٥ م) .
مخطوط المكتب الهندي بلندن - رقم ٦٠/٧٥٩ .
مخطوط مكتبة الجامعة الإسلامية بعليجهره - رقم ١/١٢٠ .
مخطوط المكتبة العامة برامبور - رقم ٥٠/٤١٦/١ .
طُبِع الشرح في كلكتا بالهند عام ١٨٢٩ م .
- ٣ - رمضان بن حُريرة الجزائرى القادري :
أتمَّ شرحه عام ١٠٩٢ هـ (١٦٨١ م) .
مخطوط دار الكتب المصرية بالقاهرة : فهرست الكتب العربية المحفوظة بالكتبخانة الخديوية المصرية ، المجلد السادس - رقم ١٨٠ .
مخطوط المكتبة الشرقية لجامعة القديس يوسف ببيروت - رقم ٢٤٠ .
مخطوط مكتبة سليم أغا باستانبول - رقم ٧٣٤ .
مخطوطا مكتبة بشاور - رقم ١٦٩٤ ، ١٧٣٥ .
مخطوط المكتبة العامة برامبور - رقم ٩/٢٨/٤٢٧/١ .
مخطوط المكتبة العامة ببطرسبرج (لينينجراد) - كتالوج كراتشكوفسكى رقم ٩٢٩ .
- ٤ - حاجى حسين :
مخطوط المكتب الهندي بلندن - رقم ٧٦٢ .
- ٥ - شمس الدين على الخلخالى :
مخطوط المكتب الهندي بلندن - رقم ٧٦٣ .
مخطوط مكتبة جون ريلاندز بمانشستر - رقم ٣٥٥ .
مخطوط مكتبة بشاور - رقم ١٧٦٦ .
مخطوط مكتبة م . حسين - حيدرآباد (مجلة الجمعية الآسيوية الملكية - عام ١٩١٧ - العدد ٢٢٥ - صفحة ١٠٩) .

٦- جواد بن سعد بن جواد :

مخطوط المتحف البريطاني بلندن - رقم : شقيقات ٦٢٨٠ .

مخطوط المكتبة العامة ببطرسبرج (لينينجراد) - كتالوج مجموعة بخارى رقم ٤٢٠ .

مطبوع بالمجلس الوطنى بطهران - رقم ١٢٧٣ .

٧- عمر بن أحمد المائى الشلى :

مخطوط مكتبة جامعة لينزج - رقم ٨/٨٨٣ .

مخطوط المكتبة العامة بميونخ - مجموعة جلازر رقم ٨٥١ .

المكتبة الملكية ببرلين الغربية - كتالوج ألواردت رقم ٥٣٠١ .

مخطوط مكتبة قوله بركيا - رقم ٢٦٤/٢ .

٨- ميرهسين الميئدى اليزدى :

مخطوط مكتبة المشهد - رقم ١٢٤/٤٠/١٧ .

٩- لطف الله المهندس اللاهورى :

مخطوط المكتبة العامة - رامبور - رقم ٧٥/٤١٦/١ .

١٠- شمس الدين على الحسنى :

مخطوط المكتبة العامة - رامبور - رقم ٤٦/١ .

١١- عبد الباسط بن رُسْتَم أحمد بن على أصغر القنوجى :

مخطوط المكتبة العامة - رامبور - رقم ٤٧/١ .

١٢- سليمان بن أبى الفتح كشميرى :

كتاب «اللُّباب» .

١٣- عبد الرحمن بن أبى بكر المرعشى :

مخطوط مكتبة قوله - رقم ٢٦٤/٢ .

١٤- رمضان بن أبى هريره الجزرى القادرى :

«حلُّ الخلاصة لأهل الرياسة»

مخطوط الخزانة الآلوسية - مكتبة المتحف العراقى ببغداد - رقم ٨٥٥٨ .

• الكتب المطبوعة :

- ١ - طبعة استانبول - ليتو جُلستان ، عام ١٢٦٨ هـ .
- ٢ - طبعة كشمير ، عام ١٢٨٥ هـ ، عام ١٢٩٩ هـ .
- ٣ - طبعة كلكتا بالهند (مع شروح) ، عام ١٨١٢ م .

• ترجمات الكتاب :

- ١ - ترجمة فارسية بالمتحف البريطاني بلندن : المجموعة الفارسية ٢ ، رقم ٤٥٠ أ .
- ٢ - ترجمة ألمانية بقلم نِسْلَمَان بـيرلين عام ١٨٤٣ م .
Nesselmann : "Essenz der Rechenkunst", Berlin, 1843.
- ٣ - ترجمة فرنسية بقلم المستشرق أ . مايّر بيـاريس عام ١٨٤٦ م .

• مخطوطات مكتبات حلب

تتوفر في مكتبات حلب ستّ مخطوطات لكتاب «خلاصة الحساب» نبيها فيما يلي :

- ١ - «الخلاصة في علم الحساب والجبر والمقابلة»
مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية - رقم ١٧٧٣ .
ويقع في ٥٥ صفحة - مقاس : $20,5 \times 15,5$ سم .
(راجع الأشكال ١ - ٣ ، ٧ - ١٠) .
- ٢ - «خلاصة الحساب»
مخطوط المكتبة المولوية - رقم ٧٥٣ .
ويقع متن الكتاب في ٦٣ صفحة ، ثم يلي ذلك شروح له حتى صفحة ٧١ -
مقاس المخطوط : 21×15 سم .
(راجع شكل ٤) .
- ٣ - «خلاصة الحساب»
مخطوط المكتبة الأحمدية - رقم ١٢٥٣ .
ويقع في ٥٥ صفحة - قطع ربع : 21×16 سم .

فُرِغَ من نَسْخه سنة ١٠٩٠ هـ .
(رَاجع الأشكال ٥ ، ٦ ، ١٦ ، ١٨) .

٤ - «خلاصة في علم الحساب»
مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية - رقم ٩١٢ .
نَسْخُهُ حسن بن جمال الدين الحلبي الديركوشي سنة ١٠٨٦ هـ .
مقاس المخطوط ٢١ × ١٦ سم .

٥ - «خلاصة الحساب»
مخطوط مكتبة مدرسة الشيخ أحمد الصديق - رقم ١٥٩ .
ويشتمل على شرح حسين بن غياث الدين منصور اليزدي .
فُرِغَ من نَسْخه سنة ١١١٧ هـ - مقاس المخطوط : ٢٠ × ١٣ سم .

٦ - «خلاصة الحساب»
مخطوط مكتبة مدرسة الشيخ أحمد الصديق - رقم ٦٦ .
نَسْخُهُ محمد سليمان الريحاي سنة ١١٣٢ هـ - مقاس المخطوط :
٢٠ × ١٥ سم .

هذا ولَمَّا كانت المخطوطات الثلاث الأولى هي أوضح هذه النسخ وأجودها
وأكملها ، فقد تمَّ تحقيق هذا الكتاب من واقعها مع مقابلة هذه النسخ الثلاث مع
بعضها البعض وإثبات أهم الفروق بينها في الحاشية ، مستعملين في التحقيق علامات
الترقيم والرسم العصري للحروف ، وذلك حتى يكون النصُّ واضحًا كلَّ الوضوح
لقارئ اليوم .

۵۰

وہیختہ صاف
الایچہ اربعہ افلاس

الصفحة الأولى من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية بـ حلب - رقم ١٧٧٣

في هذا الفن ما لم يروا في حلتها افكارهم ووجهوا الى استخراجها
انظارهم ونقصوا الى كشف نقابها بكل حيلة وتوسلوا
الي رفع حجابها بكل وسيلة فاستطاعوا اليها بسيلا وما وجدوا
عليها من دلائل قاطعة باقية على عدم الاخلال بقديم الزمان
مستصعبة على سائر الادميين الى هذا الآن وقد ذكر علماء هذا
الفن بعضها في مصنفاتهم وادروا سطرانها في مؤلفاتهم
تحقيقا لا احتمال هذا الفن على المستصعبات والابيات والمخامات
لمن يدعي عدم العجز في حسابها وتحجزا للمكسبين من التمر الحلو
عما يورد عليهم منها وحشا لا صاحب الطبائع الوفاة على حلتها
والكشف عنها واما اوردت في هذه الرسالة سبعة منها على
الانعزاج اقتدارا بنارهم واقتفاء لآثارهم وهي هذه الاول
عشرة مقسومة بعشرين اذ ازيد على جذره وضرب المجموع في المجموع
حصل عدد مفروض اثنا عشر جذرات زدها عليه عشرة كان للمجموع
جذرا ونقصنا ثمانية كان الباقي جذرا الثاني كانت اقل من جذره عشرة
الاجزاء العرو والعرو وخمسة الاجزاء ازيد الرابع عدد مكعب

مكعب قسم بعشرين مكعبين الثاني عشرة مقسومة بعشرين
اذ اقسمن كلانا على الآخر وجعلنا الخارجين كما في المجموع
مسويا لا احد قسم العشرة السادس ثلث مربعات متساوية
مجموعها مربع السابع مجذور اذ ازيد عليه جذره درهما ونقص
منه جذره ودرهمان كان للمجموع والباقي جذره هذا وعلم
ايها الاخ العزيز الطالب لتغاييس الطالب اني قد اوردت
لك في هذه الرسالة الوجيزة بل الجواهر العزيرة من تغاييس
عرايس قرائين تحت ما لم يجمع الى الآن في رسالة وكتاب
فاعرف قدرنا ولا ترضى ههنا وامتنعنا لمن ليس هو صاحب
ولا ترضىها الى حريص على ان يكون بعدها ولا تبدلها لكشف
الطبع من الطالب لئلا يكون معلق للدرة في اغناق الكلام
فان كثيرا من مطالبها حوي بالصيانة والكتمان حقيقة لا
عن كراهة اهل الزمان فاحفظ وحشيتي اليك واسم حافظ عليك

تمت رسالة اللطيفة بنو محمد
والا زلت الشريعة وصلى الله
شندنا محمد وعلي وصحبه
وسلم

شكل (٣)

الصفحة الأخيرة من خاتمة مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية بجلب - رقم ١٧٧٣

بسم الله الرحمن الرحيم
 نحن نكتب هذه الرسالة ليعلم بها جميع رعايا الدولة ولا يشترى بها رخصاً ولا يبيع بها
 ونصلي على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين
 على الهدى والرشاد في ديارهم
 على طهرته وعفته وبره في ديارهم

بسم الله الرحمن الرحيم
 محمد كيان لا يحيط بجميع نعمه عدده ولا ينتهي نفعه
 قسمه إلى أمية ونصلي على سيدنا محمد النبي المجتبي وعترته
 سيما الأربعة المتناسبة أصحاب العبادات بعد فان الفقير
 إلى الله الغني بهاء الدين محمد بن الحسين العاملي انطقه الله
 بالفتوى في يوم الحسنة يقول ان علم الحسنة لا يخفى على شئ
 وسمو مكانه ورشاقة مسائله ووثاقه دلائله لافتقار
 كثير من العلوم اليه وانخفاف جهم غفير من المعاملات عليه
 وهذه رسالة حوت الاظم من اصوله ونظمت المهم من
 ابوابه وفصوله وتضمنت منه فوائد لطيفة هي خلاصة كتب
 المتقدمين وانطوت منه على قواعد شريفة هي زبدة فروع
 المتأخرين سميها خلاصة الحسنة ورتبتها على مقدمة
 المقدمة الحسنة علم يستعمل منه استخراج الجملات العددية

فانقسمه على الثلاثة فيخرج ستة وثمانون ديناراً وثلاث
 وهو لزيد وعلى الاثنين يخرج تسعة وعشرون وثمانون ديناراً
 ونصف وهو لعمرو وعلى العشرة يخرج خمسة وعشرون ديناراً
 وتسعة اعشار وهو ليكره وعلى الخمسة عشر يخرج سبعة عشر
 ديناراً وخمسة وثلاث وخمسة دينار وهو لعماد وهو لعماد
 كثر فاضرب الخارج في عدة المكرر ليحصل المطلوب كما
 اذا اؤتمت في المثال لزيد بتسعين وهو ثلاثة اعشار
 وليكره بربعين وهو ثلثا خمسين فاضرب خمسة وخمسين
 وتسعة اعشار في الثلاثة يحصل سبعة وسبعون ديناراً
 بسبعة اعشار دينار وهو تضرب سبعة عشر وخمسة
 وثلاث وخمسين في الاثنين يحصل اربعة وثلاثون
 وثلاث وخمسة وبما مر من القواعد يسهل الامر في تعقده
 وهذا الاخير يعتم الثلاثة وهو الاول مما تقرر به
 الرسالة وللاذنباتين من اهل الرقوم طريق آخر يزيد
 على سطر المعبر من المتة لله تعالى وتعالى

لن نأخذكم بالحق

نحمدك يا من لا يحيط بجميع نعمه عدد، و
قسمه الى امد، ونصلي على سيدنا محمد النبي
عزته لا سيما الاربعة المناسبة اصحابه

فان الفقير الى الله الغني بهاء الدين محمد

العالم في انطقه اذ في يوم الحجاب يقول اء

پیشانی و شانه و سینه و کمر و ران و پا

دلالة الافتقار كثير من العلوم اليه ونعظم

三

اصول ونظم الحکم من ابوابه و فصوله

تجدد فوارد لطیفہ ہی خلاصہ کتب الہ

وانطوت منه على عوائد من زبدية

تمت خلاصة الحساب ورتبته على

ابواب المقدمة الحباب علم يستغ

المجموعات العددية من معلومات مختصة

العدد المتحصل في المائدة كاقيل ومن شبه

من الرياضي وفيه كلام والعدد قبل

[illegible]

العلامة الدكتور محمد عبد الوهاب

مجلس شورای ملی

۱۰۰

1. The first step in the process is to identify the problem or issue that needs to be addressed. This involves gathering information and understanding the context of the problem.

Handwritten text in Arabic script, likely a continuation of the manuscript's content.

[illegible]

سبيل الأنورج اقتداو بمنازم واقتفاء آثارهم الا ان عشرة عشر
 بسمين اذ ازيد على كل جذرة وضرب المجتمع في المجتمع حصل عدد
 مفروض والثاني مجذوران زدنا عليه عشرة كان المجتمع جذرا او
 نقصنا منه كان الباقي جذرا وثالث اقر يزيد بعشرة الا جذرا ما
 لغرو ولعمرو بخمسة الا جذرا لزيد والرابع عدد مكعب بسمين
 اذا قسمنا كلا منهما على الاخر وجعنا الخارجين كان المجتمع مائيا
 لاحد قسمي عشرة ولسايس ثلثة مربعات متناسبة بمجموعها مربع
 والباقي اذ ازيد عليه جذر ودرهمان او نقص منه جذر ودولهان
 كان المجتمع او الباقي جذرا واعلم انما الاخر العزيز الطالب لنفايس
 المطالب ان قد اوردت لك في هذه الرسالة اوجزة بل الجوهرة
 العزيزة من نفايس عرايس قوانين الحساب عالم المجتمع الى الان
 في رسالتك ولاكتاب فاعرف قد رعا وترخص مجرعا واسفها
 ليس اهلها ولا ترمنها الا على حريص ان يكون بعلمها ولا يثبتها
 لكثيف الطبع من الطلاب لئلا يكون محلقا للدرة اعناق الاملا
 فان اكثر من مطالبها حري بالقصانة والكتمان حقيق بالاسرار
 عن اكثر هذا الزمان فاحفظ

وصيتي اليك والله

حفيظ عليكم

تمت الرسالة

بعون الله

الملا

في

والعزم

محمود

محتويات الكتاب

« الخلاصة في علم الحساب والجبر والمقابلة »

أو « خلاصة الحساب »

صفحة

٣٣

المقدمة

٣٥

الباب الأول : في حساب الصُّحاح

٣٥

الفصل الأول : في الجمع

٤١

الفصل الثاني : في التنصيف

٤٣

الفصل الثالث : في التفريق

٤٥

الفصل الرابع : في الضرب

٥٩

الفصل الخامس : في القسمة

٦٢

الفصل السادس : في استخراج الجذر

٦٦

الباب الثاني : في حساب الكسور

٦٦

المقدمة الأولى

٦٨

المقدمة الثانية

٧١

المقدمة الثالثة : في التجنيس والرفع

٧٢

الفصل الأول : في جمع الكسور وتضعيفها

٧٢

الفصل الثاني : في تنصيف الكسور وتفريقها

٧٢

الفصل الثالث : في ضرب الكسور

٧٣

الفصل الرابع : في قسمة الكسور

٧٣

الفصل الخامس : في استخراج جذر الكسور

٧٤

الفصل السادس : في تحويل الكسر من مخرج إلى مخرج

٧٥

الباب الثالث : في استخراج المجهولات بالأربعة المتناسبة

٧٨

الباب الرابع : في استخراج المجهولات بحساب الخطأين

| | |
|-----|--|
| ٨٢ | الباب الخامس : في استخراج المجهولات بالعمل بالعكس |
| ٨٤ | الباب السادس : في المساحة |
| ٨٤ | مقدمة |
| ٩٠ | الفصل الأول : في مساحة السطوح المستقيمة الأضلاع |
| ٩١ | الفصل الثاني : في مساحة بقية السطوح |
| ٩٣ | الفصل الثالث : في مساحة الأجسام |
| ٩٥ | الباب السابع : فيما يتبع المساحات من وزن الأرض لإجراء القنوات ، ومعرفة ارتفاع المرتفعات ، وعروض الأنهار ، وأعماق الآبار |
| ٩٥ | الفصل الأول : في وزن الأرض لإجراء القنوات |
| ٩٩ | الفصل الثاني : في معرفة ارتفاع المرتفعات |
| ١٠٥ | الفصل الثالث : في معرفة عروض الأنهار ، وأعماق الآبار |
| ١٠٧ | الباب الثامن : في استخراج المجهولات بطريق الجبر والمقابلة |
| ١٠٧ | الفصل الأول : في المقدمات |
| ١١٦ | الفصل الثاني : في المسائل الست الجبرية |
| ١٢٧ | الباب التاسع : في قواعد شريفة وفوائد لطيفة لا بد للمحاسب منها ، ولا غنى له عنها . |
| ١٤٤ | الباب العاشر : في مسائل متفرقة بطرق مختلفة . |
| ١٦٠ | خاتمة |
| ١٦٩ | تذييب |
| ١٧٥ | ملحق للرسالة : قاعدة في بيان تقسيم الغرماء . |

متن مخطوط

“الخلاصة في علم الحساب والجبر والمقابلة”

لبهاء الدين العاملي

وبهامشه الشرح والتحليل العاملي لضمونه

بسم الله الرحمن الرحيم

نحمدك يا مَنْ لا يحيطُ بجميعِ نِعَمِهِ عددٌ ، ولا ينتهى تضاعفِ قسمه إلى أَمَدٍ ،
ونُصَلِّي على سيدنا محمد النبي المجتبى ، وعترته لا سيَّما الأربعة المتناسبة أصحاب
العباد .

أما بعد فإنَّ الفقيرَ إلى الله الغنيَّ بهاء الدين محمد بن الحسين^(١) العاملِ أنطقه الله
بالصوابِ في يومِ الحسابِ . يقولُ إنَّ عِلْمَ الحسابِ ، لا يخفى علوُّ شأنه وسُمُوُّ
مكانه ، ورشاقةُ مسائله ، ووثاقةُ دلائله ، لافتقارِ كثيرٍ من العلوم إليه ، وانعطافِ
جَمِّ غفيرٍ من المُعاملاتِ عليه ، وهذه رسالةٌ حَوَتْ الأهمَّ من أصوله ، ونظَّمتِ
المهمَّ من أبوابه وفصوله ، وتضمَّنتِ منه فوائدَ لطيفةً هي خلاصةُ كُتُب المتقدمين .
وانطَوَّتْ منه على قواعد شريفة هي زبدةُ رسائل المتأخِّرين ، سمَّيْتُها خلاصةَ
الحسابِ ، ورَتَّبْتُها على مقدمةٍ وعشرة^(٢) أبواب .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : حسين .

(٢) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ - في المخطوط ١٢٥٣ : عشر .

المقدمة

الحسابُ علمٌ يُستعلمُ منه استخراجُ المجهولاتِ العدديَّةِ من معلوماتٍ مخصوصةٍ ، وموضوعُ العددِ الحاصلُ في المادَّةِ كما قيل ، ومن ثَمَّةِ عُدَّةِ الحسابِ من الرياضيّ وفيه كلامٌ ، والعددُ قيل كميَّةٌ تُطلق على الواحد وما تألَّف منه ، فيدخلُ فيه ^(١) الواحد ، وقيل نصف مجموع حاشيته ^(٢) فيخرج ، وقد يتكلَّف لإدراجه بشمول الحاشية الكسر ، والحقُّ أنَّه ليس بعددٍ وإن تألَّف منه الأعداد كما أنَّ الجوهر الفرد عند مثبتهِ ليس بجسمٍ وإن تألَّف منه الأجسام ، وهو إمَّا مطلقٌ فصحيحٌ ، أو مُضَافٌ إلى ما يُفرضُ واحدًا فكسرٌ ، وذلك الواحدُ مخرجه ، والمُطلقُ إن كان له أحد الكسور التسعة ، أو جذرٌ فمُنطَقٌ وإلا فاصمٌ ، والمُنطَقُ إن ساوى أجزاءه فتامٌ ، أو زاد عليها فزايدٌ ، أو نقص عنها فناقصٌ .

ومراتبُ العددِ أصُولُها ثلاثة ، آحادٌ وعشراتٌ ومئاتٌ ، وفرُّوعُها ما عداها ^(٣) مما لا يتناهى ، وتعطف إلى الأصول ، وقد وضع له حكاء الهند الأرقامَ التسعة المشهورة :

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

(١) ناقصة في المخطوطين ٧٥٣ - ١٧٧٣ .

(٢) حاشيتا العدد هما العددان السابق له واللاحق له مباشرة .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : في هذه المقدمة يتناول بهاء الدين العاملي بالتعريف علم الحساب ، كذا العدد من صحيح وكسر ، وتام وزايد وناقص ، فيبدأ بقضية الواحد وهل هو من العدد أو خارجه ، فإن عُرِف العدد بأنه نصف مجموع حاشيته ، بمعنى أنه القيمة المتوسطة للعددين السابق له واللاحق له على التسلسل الطبيعي (كأن يكون تعريف الأربعة =

= بالوسط الحسابي للعددين ٣ ، ٥) فإن الواحد لا يدخل - حسب هذا التعريف - في العدد ، إلا إذا كانت الحاشية تشمل الكسر ، فعندئذ يمكن تعريف الواحد على أنه القيمة المتوسطة لحاشيته - وهما في هذه الحالة $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ - علمًا بأن العدد وحاشيته لا بد وأن يُكوّنا متوالية عددية ذات تزايد ثابت .

يعرج العامل بعد ذلك إلى تقسيم العدد إلى صحيح وكسر ، والكسور التسعة المذكورة هي $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{7}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{10}$ ، وإن كان للعدد جذر صحيح قبل عليه جذر مُنطق . وإن لم يكن صحيحًا سُمّي جذرًا أصمّ .

والعدد إن ساوى مجموع عوامله فهو تام ، فإن زاد عليها أو نقص عنها أطلق عليه عدد زائد أو ناقص على التوالي ، مثال ذلك العدد ٦ ، فإن عوامله هي : ١ ، ٢ ، ٣ بمعنى أنه يقبل القسمة على أى منها ، ومجموع هذه العوامل $1 + 2 + 3 = 6$ = العدد . ومن هنا جاءت تسميته بالتام ، أمّا في العدد ٤ مثلاً فعوامله ١ ، ٢ وبمجموعها ٣ ، فيكون العدد ٤ عددًا زائدًا ، وعلى العكس من ذلك إذا أخذنا العدد ١٨ مثلاً فعوامله هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ وبمجموعها ٢١ ، وبذلك يكون العدد ١٨ أنقص من مجموع عوامله ، فيوصف بأنه عدد ناقص .

ويختتم العاملى مقدمته بالإشارة إلى مراتب العدد : آحادها وعشراتها ومئاتها وما يعلوها من المراتب ، وإلى أن العدد يتركب من الأرقام التسعة المعروفة من الواحد إلى التسعة ، أما الصفر فيعنى خلاء المرتبة من أى من هذه الأرقام التسعة .

الباب الأول

في حساب الصّحاح

زيادة عددٍ على آخر جمعٌ ، ونقصه منه تفريقٌ ، وتكريره مرّة تضعيفٌ ، ومرارًا بعدّة آحاد الآخر^(١) ضربٌ ، وتجزئته بمتساويين تنصيفٌ ، وبمتساويات^(٢) بعدّة آحاد الآخر قسمةٌ ، وتحصيل ما تألف من تربيعه تجذيرٌ ، ولنورد هذه الأعمال في فصولٍ .

الفصل الأول

في الجمع

ترسم العددين متحاذيين ، وتبدأ من اليمين ، وتزيد^(٣) كلّ مرتبةٍ على محاذيها ، فإن حصل أقل من عشرة ترسم تحتها ، أو أزيد فالزائد ، أو عشرة فصيفًا ، حافظًا في هاتين الصورتين للعشرة واحدًا لتزيده على ما في المرتبة الثانية ، أو ترسمه بجانب سابقه إن خلت ، وكلّ مرتبةٍ لا يُحاذيها عددٌ ، فانقلها بعينها إلى سطرٍ الجمعِ ، وهذه صورته^(٤) :

$$\begin{array}{r} 2272 \\ 4330 \\ \hline \end{array}$$

$$6602$$

$$\begin{array}{r} 40877 \\ 30283 \\ \hline \end{array}$$

$$71160$$

$$\begin{array}{r} 20372 \\ 07656 \\ \hline \end{array}$$

$$28028$$

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : وبمتساوية .

(٣) في المخطوط ١٢٥٣ . زيادة .

(٤) في المخطوط ١٢٥٣ يكتب الصفر : ٥ . والخمسة :

شرح : يبدأ العاملى الباب الأول من كتابه بتعريف العمليات الحسابية البسيطة من جمع وتفریق (وقد استعمل العرب كلمة التفریق بمعنى الطرح) ، وضرب وتنصيف وقسمة ، وتربيع (ضرب العدد فى نفسه) ، وتجذير (إيجاد العدد الذى إذا ضرب فى نفسه كان العدد المُعطى) .

ويتناول المُصنّف فى الفصل الأول عملية الجمع . وهى على النحو الذى نعرفها عليه اليوم ، وعملية الجمع - كما نعلم - تبدأ من اليمين إلى اليسار ، بيد أنه من الممكن أيضًا إجراء عملية الجمع من اليسار إلى اليمين ، إلا أن ذلك يقتضى أن نثبت العشرة الزائدة من جمع العددين فى السطر التالى فى مرتبة أعلى (أى إلى اليسار) ، ونكتبها إما ١ أو - ، ثم نجمع السطرين لنحصل على حصيلة عملية الجمع ، مثال ذلك ما يلى :

المطلوب جمع : ٦٣٢٥ ، ٧٨٩٤

| | |
|---|---|
| $ \begin{array}{r} 6325 \\ 7894 \\ \hline 3119 \\ 111 \\ \hline 14219 \end{array} $ | $ \begin{array}{r} 6325 \\ 7894 \\ \hline 3 \\ 1 \\ \hline \end{array} $ |
|---|---|

فبالعمل من اليسار إلى اليمين نبدأ بجمع ٦ ، ٧ فتكون النتيجة ١٣ ، نضع ٣ تحت ٧ ويوضع ١ فى السطر التالى وفى مرتبة العشرات بالنسبة إلى ٣ (أى إلى يسارها) ، ويمكن استبدال الواحد بشرطة لجرد الدلالة على وجود واحد فى تلك المرتبة ، ومن الواضح أن هذه الطريقة لا تكلف الذهن بتذكر أى محفوظ إذ أن كل عملية جمع عددين (بصرف النظر عن اتجاه الجمع يمينًا أو يسارًا) تسجل - عمومًا - على سطرين ، وهى طريقة يمكن بها تجنب الخطأ فى الجمع ، وما أحرانا أن نتبع هذا الأسلوب فى مدارسنا فهو أفضل وأقل تعرضا للخطأ .

وإن تكثرت سطورُ الأعدادِ ، فارسمها متحاذاة المراتبِ ، وابدأ من اليمين حافظاً لكل عشرةٍ واحداً لما عرفت ، وهذه صورته :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ٣ | ٧ | ٣ | ٠ | ٠ |
| ٨ | ١ | ٣ | ٢ | ٠ |
| ٣ | ٤ | ٨ | ٥ | ٩ |

٤ ٣ ٥ ٨ ٩

واعلم أنَّ التضعيف في الحقيقة^(١) جمعُ المِثْلَيْنِ ، إلّا أنَّك لا تحتاج إلى رسمِ المثلِ ، بل تجمع كُلَّ مرتبةٍ من يمينها إلى مثلها ، كأنه بجذائها ، وهذه صورته :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ٢ | ٢ | | | | |
| ٣ | ٧ | ٠ | ٢ | ٥ | ٢ |

٦ ٤ ١ ٤ ٠ ٥

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٧ | ٠ | ٦ | ٥ | ٧ | ٨ | ٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|

٤ ١ ٢ ٥ ٧ ٩ ١

ولك الابتداء في هذه الأعمال من اليسارِ ، إلّا أنَّك تحتاجُ إلى المحو والإثباتِ ، ورسمِ الجداولِ ، وهو تطويلٌ بغير طائلي ، وهذه صورتها :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ٧ | ٣ | ٥ | ٤ | ٥ | : |
| ٣ | ٤ | ٩ | ٧ | ٢ | |
| ٠ | ٧ | ٤ | ١ | ٧ | |
| ٨ | ٨ | ٢ | ٨ | | |
| ٠ | ٨ | ٤ | ٢ | ٨ | |

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : في تحقيقه .

صورة جمع الأعداد :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ٥ | ٣ | ٧ | ٣ | ٢ |
| ٠ | ٤ | ١ | ٧ | ٩ |
| ٠ | ٠ | ١ | ٠ | ٥ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ٥ | ٧ | ٩ | ٠ | ٦ |
| ٨ | ٠ | ١ | | |

صورة التضعيف :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ٥ | ٨ | ٠ | ١ | ٦ |
| ٢ | ٥ | ٥ | ٦ | ٧ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ٤ | ٠ | ٠ | ٢ | ٤ |
| ٥ | ١ | ١ | ٣ | |

٥ ١ ١ ٣ ٤

واغْلَمْ أَنَّ مِيزَانَ الْعَدَدِ (٠) مَا يَبْقَى مِنْهُ بَعْدَ إِسْقَاطِهِ تِسْعَةً تِسْعَةً ، وَامْتِحَانُ الْجَمْعِ وَالتَّضْعِيفِ بِجَمْعِ مِيزَانِي الْجُمُوعَيْنِ ، وَتَضْعِيفِ مِيزَانِ الْمُضْعَفِ ، وَأَخْذُ مِيزَانِ الْجَمْعِ ، فَإِنْ خَالَفَ مِيزَانَ الْحَاصِلِ ، فَالْعَمَلُ خَطَأً .

• شرح :

ميزان العدد

يشير العامل هنا إلى القاعدة الذهبية التي اتبعها العرب لتحقيق سلامة العملية الحسابية ، وسموها بميزان العدد ، وتتلخص في الخطوات التالية :

لنفرض أننا أثبتنا عملية الجمع :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ٩ | ٧ | ٤ | ٣ | ٥ | ٦ |
| ٣ | ٧ | ٤ | ٩ | ٨ | ٣ |
| ١ | ٣ | ٤ | ٩ | ٣ | ٩ |

= والمطلوب التأكد من صحة ذلك .

١ - يُعرّف ميزان العدد بأنه ما يبقى من العدد بعد إسقاطه تسعة تسعة ، بمعنى أننا نجمع الأرقام المكونة للعدد ، ونستبعد جميع التسعات الصحيحة منه ، فما يبقى بعد ذلك فهو ميزان العدد .

فبالنسبة لحاصل الجمع
واضح أنه يشتمل على :

وباستبعاد التسعات . أى بإسقاط العدد تسعة تسعة يبقى ٥ فيكون ميزان حاصل الجمع هو ٥ .

٢ - نوجد ميزان كل من العددين المجموعين :

فبالنسبة للعدد الأول : ٦ ٥ ٣ ٤ ٧ ٩

باستبعاد :

إسقاط العدد تسعة تسعة { ٩ ٦ ٣ ٥ ٤

٧ يكون الميزان :

وبالنسبة للعدد الثاني : ٣ ٨ ٩ ٤ ٧ ٣

باعتبار : ۹

$$(2 \times 9 = 18 =) 3 \quad 2 \quad 1 \quad 3$$

٧ يكون الميزان :

٣- نجرى العملية الحسابية لميزاني العدين المعطين

$$1\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y} \therefore$$

وباسقاط هذا العدد تسعة تسعة يكون ميزان حاصل الجمع هو (١٤ - ٩) = ٥ وهو نفسه ميزان حاصل الجمع الذي حصلنا عليه في الخطوة الأولى .
فالعملية الحسابية إذن صحيحة .

ومن الممكن ترتيب عملية الجمع وتحقيقها بقاعدة ميزان العدد على الوجه التالى :

ميزان العدد

| | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|
| ٢ | ٧ | ٢ | ٩ | ٦ | ٥ |
| ١ | ٩ | ٠ | ٢ | ٧ | ١ |
| ٧ | ٧ | ١ | ١ | ٠ | ٧ |
| ↓ ٨ | ٢ | ٠ | ٣ | ٦ | ٦ |
| صفر | ٢ | ٥ | ٤ | ٧ | ٠ |

حاصل :

الجمع

هذا وتسرى هذه « القاعدة الذهبية » على جميع العمليات البسيطة من جمع وطرح وضرب وقسمة (حيث يمكن تحويلها إلى صورة الضرب) ، وقد عرفت فى الغرب بتسمية « Golden Rule » .

الفصل الثاني

في التَّنْصِيفِ

• تبدأ من اليسار وتضع نصفَ كُلِّ تحتهُ إن كان زوجًا ، والصحيح من نصفه إن كان فردًا حافظًا للكسرِ خَمْسَةً لتزيدها على نصف ما في المرتبة السابقة إن كان فيها عدد غير الواحد ، وإن كان واحدًا أو صفرًا ، وضَعْتَ الخمسة تحته ، فإن انتهت المراتبُ ومعك كسرٌ ، فضعْ له صُورَةَ التَّنْصِيفِ هكذا :

$$\begin{array}{r} \text{صورة التَّنْصِيفِ من اليسار :} \\ \hline 8 \ 7 \ 3 \ 0 \ 3 \ 1 \ 3 \\ \hline 4 \ 3 \ 6 \ 5 \ 1 \ 5 \ 6 \ 5 \end{array}$$

وَلَكَّ أَنْ تَبْدَأَ مِنَ الْيَمِينِ رَاسِمًا لِلجَدُولِ عَلَى هَذِهِ الصُّورَةِ :

$$\begin{array}{r} \hline 3 \ 6 \ 5 \ 4 \\ \hline 1 \ 3 \ 2 \ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 8 \ 7 \\ \hline 1 \ 8 \ 2 \ 7 \end{array}$$

والامتحانُ بتَضْعِيفِ مِيزَانِ التَّنْصِيفِ ، وأخذِ مِيزَانِ المِجْتَمَعِ ، فَإِنْ خَالَفَ مِيزَانَ الْمُتَنَصِّفِ ، فالعملُ خطأً .

شرح : يعرض بهاء الدين العامل في هذا الفصل لطريقة التَّنْصِيفِ بادئًا إمَّا من اليسار وإمَّا من اليمين ، وطريقة التَّنْصِيفِ بدئًا من اليسار هي نفسها الطريقة التي نتبعها اليوم ، ولذا فإنها في غير حاجة لمزيد من شرح ، أما طريقة التَّنْصِيفِ من اليمين ، =

= فيقسم كل رقم على ٢ ويوضع الباقي الصحيح تحت الرقم الجارى تنصيفه ، أما الباقي وهو $\frac{1}{2}$ أو $\frac{5}{10}$ فيبين إما بعلامة (-) أو (٥) فى السطر التالى وفى مرتبة واحدة أقل وهى تعنى $\frac{5}{10}$.

| | | |
|--------------|---------|----------------------|
| المقسوم عليه | المقسوم | |
| ٢ | ٧ ٢ ٤ | مثال ذلك : |
| | ٢ | تنصيف الرقم الأول : |
| | ١ | تنصيف الرقم الثانى : |
| | ٣ | تنصيف الرقم الثالث : |
| | - | |
| | ٣ ٦ ٢ | ناتج القسمة : |

العلامة (-) = ٥

ويمكن التحقق من نتيجة عملية التنصيف كما يلى :

$$\begin{array}{rcl}
 362 & = & \frac{724}{2} \\
 362 \times 2 & = & 724 \quad \text{أو} \\
 \underbrace{362} \times \underbrace{2} & = & \underbrace{724}
 \end{array}$$

معادلة موازين الأعداد ٤ = ٢ × ٢ .∴ فالعمل صحيح .

ميزان المُنصّف = تضعيف ميزان النصف = ميزان المجتمع

وهو ما جاء بمثنى المخطوط : «والامتحان بتضعيف ميزان النّصف ، وأخذ ميزان المجتمع ، فإن خالفَ ميزانَ المُنصّفِ ، فالعمل خطأ» .

الفصل الثالث

في التفريق

تضعها كما مرّ وتبدأ من اليمين ، وتنقص كل صورة من محاذيها ، وتضع الباقي تحت الخطّ العرضي ، فإن لم يبق شيء فصفرًا ، وإن تعذر النقصان منه ^(١) أخذت الواحد ^(٢) من عشراته ، ونقصت منه ، ورسمت الباقي ، فإن خلت عشراته أخذته من مئاته ، وهو عشرة بالنسبة إلى عشراته ، فضع فيها منه تسعة ، واعمل بالواحد لما عرفت ، وتمم العمل هكذا :

| | |
|-----------------------|---------------|
| مَنقُوصٌ منه | ٩ ٠ ٧ ٣ ٥ ٠ ٦ |
| مَنقُوصٌ | ٢ ٩ ٠ ٠ ٩ ٥ ٨ |
| الباقي من المنقوص منه | ٦ ١ ٧ ٢ ٥ ٤ ٨ |

ولك الابتداء من اليسار هكذا :

| | |
|-----------|---------|
| منقوص منه | ٩ ٢ ٦ ٣ |
| منقوص | ٦ ٢ ٨ ٤ |
| | ٣ ٠ ٨ ٩ |
| | ٢ ٩ ٧ |
| | ٢ ٩ ٧ ٩ |

والامتحان بنقصان ميزان المنقوص من ميزان المنقوص منه إن أمكن ، وإلا زيد عليه تسعة وتنقص ، فالباقي إن خالف ميزان الباقي ، فالعمل خطأ .

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : واحدًا

شرح : في هذا الفصل يبين العامل كيفية إجراء عملية الطرح (ويعبر عنها هنا بالتفريق) سواء بالابتداء من اليمين أو من اليسار ، ونكتفي هنا ببيان الصورة الأخيرة : =

ميزان العدد

=

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|-----|---------------|
| ٤ | ٨ | ٦ | ٩ | ٥ | ٣ | المطروح منه : |
| ٢ | ٦ | ٧ | ٦ | ٨ | ٢ - | المطروح : |
| | ٢ | ٩ | ٣ | ٧ | ١ | |
| | ١ | | ١ | | | (مطروح) |
| ٢ | ١ | ٩ | ٢ | ٧ | ١ | ناتج الطرح : |

يعبر عنها في المخطوط
بالعلامة (-)

في المثال نبدأ من اليسار فيكون حاصل طرح ٦ من ٨ العدد ٢ الذي يكتب تحتها ، ثم نتقدم يميناً فنجد ٦ منقوص منها ٧ ، وبالتالي نزيد عشرة إلى الستة فتصبح ١٦ ونطرح منها ٧ فيكون الناتج ٩ ، وتكتب تحت السبعة . ولما كنا قد زدنا عشرة لتتمكن من إجراء الطرح الجزئي فلا بد من طرح عشرة ليستقيم العمل ، ولذلك نضع في السطر التالي ١ (أو العلامة - بنفس المعنى) في مرتبة أعلى ، على أن يجرى طرحها في العملية التالية ، وهكذا بالنسبة لبقية عمليات الطرح الجزئية .

ويمكن التحقق من صحة العملية على أساس قاعدة ميزان العدد :

$$(\text{ميزان المطروح منه} - \text{ميزان المطروح}) = \text{ميزان ناتج الطرح}$$

الفصل الرابع

فى الضرب

وهو تحصيل عدد نسبة أحد المضروبين إليه كنسبة الواحد إلى المضروب الآخر .
ومن هذا يعلم أن الواحد لا تأثير له فى الضرب . وهو ثلاثة : مفرد فى مفرد ، أو فى
مركب ، أو مركب فى مركب . والأول إما آحاد فى آحاد أو فى غيرها ، أو غيرها فى
غيرها .

أما الأول فهذا الشكل متكفل به * ، وأما الأخيران فرداً فيها غير الآحاد إلى
سميها منها . واضرب الآحاد فى الآحاد ، واحفظ الحاصل ، ثم اجمع مراتب
المضروبين . وابسط المجتمع من جنس مثلث المرتبة الأخيرة ، فى ضرب الثلاثين فى
الأربعين تبسط الاثنى عشر بمئات إذ المراتب أربع ، والثالثة مرتبة المئات ، وفى
ضرب الأربعين فى خمسمائة تبسط العشرين ألفاً ، إذ المراتب خمس ، وأما الثانى
والثالث فإذا حلّ المركب إلى مفرداته رجّع إلى الأول . فاضرب المفردات بعضها فى
بعض واجمع الحواصل .

وللضرب قواعد لطيفة ثعين على استخراج مطالب شريفة :

قاعدة فيما بين الخمسة والعشرة

تبسط أحد المضروبين عشرات وتنقص من الحاصل مضروبه فى فضل العشرة على
المضروب الآخر .

شرح : فى هذا الفصل يشرح العامل طريقة الضرب مبيثاً مراتب المضروبين ، وهى
نفس الطريقة التى نستعملها اليوم ، ويقدم العامل جدولاً لضرب الأعداد المفردة (من
الواحد إلى التسعة) بعضها فى بعض . وبالإضافة إلى بيانه للطريقة العامة لضرب عدد
مركب فى عدد مركب آخر ، فإنه يعرض بعض القواعد الخاصة لتسهيل عملية
الضرب .

| | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| | | | | | | | ٢ | ١ |
| | | | | | | ٣ | ٤ | ٢ |
| | | | | ٤ | ٩ | ٦ | ٣ | |
| | | ٥ | ١٦ | ١٢ | ٨ | ٤ | | |
| | ٦ | ٢٥ | ٢٠ | ١٥ | ١٠ | ٥ | | |
| | ٧ | ٣٦ | ٣٠ | ٢٤ | ١٨ | ١٢ | ٦ | |
| | ٨ | ٤٩ | ٤٢ | ٣٥ | ٢٨ | ٢١ | ١٤ | ٧ |
| ٩ | ٦٤ | ٥٦ | ٤٨ | ٤٠ | ٣٢ | ٢٤ | ١٦ | ٨ |
| ٨١ | ٧٢ | ٦٣ | ٥٤ | ٤٥ | ٣٦ | ٢٧ | ١٨ | ٩ |

= في القاعدة الأولى التي تختص بضرب أعداد بين ١٠ ، ٥ في بعضها البعض .
تضرب أحد العددين في عشرة ، ثم تطرح من الحاصل مضروب نفس العدد في الفرق
بين العشرة والعدد الثاني .

مثال ذلك ضرب 9×8

$$\text{ويمكن وضعها على الصورة : } 2 \times 9 - 90 = (2-10)9 = 72 =$$

أما القاعدة الأخرى (لضرب الأرقام بين الخمسة والعشرة) فتحدد الخطوات كالتالي :

- ١- اجمع الرقمين المطلوب ضربهما في بعضها البعض .
- ٢- من حاصل الجمع خذ رقم الآحاد واضربه في عشرة .
- ٣- ثم اجمع عليه حاصل ضرب فرق كل من الرقمين عن العشرة .

مثال ذلك : 7×8

الخطوة الأولى : $15 = 7 + 8$

الخطوة الثانية : ما يزيد عن العشرة هو ٥

نسط ما فوق العشرة عشرات : أي 10×5

مثالها : ثمانية في تسعة

نَقْصُنَا من التسعين مضروب التسعة في الاثنين ، بقى اثنان وسبعون .

قاعدة أخرى : تجمع المضروبين ، وتبسط مافوق العشرة عشرات ، وتزيد على الحاصل مضروب فضل العشرة على أحدهما في فضلها على الآخر .

مثالها : ثمانية في سبعة .

زدْنَا على الخمسين مضروب الاثنين في الثلاثة .

قاعدة في ضرب الآحاد فيما^(١) بين العشرة والعشرين :

تجمع المضروبين ، وتبسط الرائد على العشرة عشرات ، ثم تنقص من الحاصل مضروب ما بين المفرد والعشرة في الآحاد التي مع المركب .

مثالها : ثمانية في أربعة عشر

نقصنا من المائة والعشرين مضروب الاثنين في الأربعة .

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

$$\begin{aligned} &= \text{الخطوة الثالثة : } 10 \times 5 + (10 - 8)(10 - 7) \\ &= 50 + 3 \times 2 = 56 \end{aligned}$$

وهذه القاعدة سليمة تمامًا ، ويمكن البرهنة عليها على الوجه التالى باستعمال الرمزين أ ، ب للعددين المطلوب إيجاد حاصل ضربهما .

الخطوة الأولى : أ + ب

الخطوة الثانية : [أ + ب - ١٠] × ١٠

الخطوة الثالثة : [أ + ب - ١٠] × ١٠ + (أ - ١٠)(ب - ١٠)

$$\begin{aligned} &= (100 + 10 - 100 - 100) + (100 - 100 - 100 + 100) = \\ &= أ ب \end{aligned}$$

وهو المطلوب

من الواضح أن هذه القاعدة ذات صفة عامة ، ويمكن تطبيقها على العددين أ ، ب أيا كانت قيمهما سواء تحت العشرة أو فوقها ، كل ما هنالك هو تغير إشارة القوسين (أ - ١٠) ، (ب - ١٠) أو أى منهما حسب قيمة العددين أ ، ب .

قاعدة في ضرب ما بين العشرة والعشرين بعضها في بعض :
تزيد آحاد أحدهما على مجموع الآخر ، وتبسط المجتمع عشرات ، ثم تضيف إليه مضروب الآحاد في الآحاد .

مثالها : ضرب ^(١) اثني عشر في ثلاثة عشر .
زِدْنَا ^(٢) على المائة والخمسين الستة ^(٣) .

قاعدة :

كل عدد يضرب في خمسة ، أو خمسين ، أو خمسمائة ، فابسط نصفه عشرات ، أو مئات ، أو ألوفاً ، وخذ للكسر نصف ما أخذت للصحيح .
مثالها : ستة عشر في خمسة ، يحصل بعد العمل ^(٤) ثمانون .
أو سبعة عشر في خمسين ، يحصل بعد العمل ^(٥) ثمان مائة وخمسون .
(أو سبعة عشر في خمسمائة ، فالجواب ثمانية آلاف وخمسمائة) ^(٦) .

قاعدة في ضرب ما بين العشرة والعشرين

فيما بين العشرة والمائة من المركبات

تضرب آحاد أقلهما في عدة تكرار العشرة ، وتزيد الحاصل على أكثرهما ، وتبسط المجتمع عشرات ، وتزيد عليه مضروب الآحاد في الآحاد .

مثالها : اثنا عشر في ستة وعشرين .

زِدت الأربعة على الستة والعشرين ، وبسطت الثلاثين عشرات ، و ^(٧) تمت العمل تحصل ثلثمائة واثنى عشرة .

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) في المخطوط ٧٥٣ : بزيادة .

(٣) في المخطوط ١٢٥٣ : ستة .

(٤) في المخطوط ١٢٥٣ : الجواب .

(٥) في المخطوط ١٢٥٣ : فالجواب .

(٦) زائدة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٧) في المخطوط ٧٥٣ : فإذا .

كلُّ عددٍ يُضربُ في خمسة عشر ، أو في مائة وخمسين ، أو في ألف وخمسمائة ، فزِدْ عليه نصفه ، وابسُطِ الحاصلَ عشراتٍ أو مئاتٍ أو ألوفًا ، وخذ للكسر نصفَ ما أخذت للصحيح .

مثالها : أربعة وعشرون في خمسة عشر .

تحصل بعد العمل^(١) ثلاثمائة وستون ، أو خمسة وعشرون في مائة وخمسين ، تحصل بعد العمل^(١) ثلاثة آلاف وسبعمئة وخمسون .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : الجواب .

= شرح : نوضح ضرب ما بين العشرة والعشرين فيما بين العشرة والمائة من المركبات .
نفترض العددين المطلوب إيجاد حاصل ضربهما :

$$(أ + ١٠) ، (ب + ١٠ ن)$$

حيث أ ، ب آحاد العددين ، ن عدة تكرار العشرة في العدد الأكبر أى رقم العشرات فيه .

فطبقا للقاعدة التى يوردها العاملى يكون حاصل الضرب

$$= [أ \times ن + (ب + ١٠ ن) \times ١٠ + أ \times ب]$$

آحاد الأقل أكثر العددين بسط المجتمع مضروب الآحاد فى
فى عدة تكرار العشرة فى عشرة الآحاد

$$= (١٠ أ ن + ١٠ ب + ١٠٠ ن + أ ب)$$

وبإجراء عملية الضرب (أ + ١٠) × (ب + ١٠ ن) بفك القوسين

$$\text{نحصل على : } (أ ب + ١٠ أ ن + ١٠ ب + ١٠٠ ن)$$

وبالتالى فالقاعدة صحيحة .

فى المثال : ١٢ × ٢٦

$$\text{حاصل الضرب} = ٢ \times ٢ + ١٠ \times (٢٦ + ٢ \times ٢)$$

$$= ٣٠٠ + ١٢ = ٣١٢$$

قاعدة في ضرب ما بين العشرين والمائة

كما تساوت عشراته بعضه في بعض

تزيد آحاد أحدهما على الآخر ، وتضرب المجتمع في عدة تكرار العشرة ، وتبسط
الحاصل عشرات ، ثم تزيد عليه مضروب الآحاد في الآحاد .

مثالها : ثلاثة وعشرون في خمسة وعشرين .

ضربت الثمانية والعشرين في اثنين ، وبسطت الستة والخمسين عشرات ،
وتممت العمل ^(١) حصل المطلوب ^(٢) . هو ^(٢) خمسمائة وخمسة وسبعون .

(١) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(٢) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : في قاعدة ضرب ما بين العشرين والمائة كما تساوت عشراته بعضه في بعض نرمر
للعدين المطلوب ضربها بالقوسين :

$$(أ + ١٠ ن) ، (ب + ١٠ ن)$$

حيث أ . ب آحاد العددين ، ن عدة تكرار العشرة (وهي متساوية في العددين) .

فحسب القاعدة يكون حاصل ضرب العددين

$$(أ + ١٠ ن) \times (ب + ١٠ ن)$$

مساويا لـ

$$[أ + (ب + ١٠ ن)] \times ن \times ١٠ + أ ب$$

| | | | |
|-----------------------|--------------|------------|--------------|
| آحاد أحد العددين مزاد | ضرب المجتمع | بسط الحاصل | مضروب الآحاد |
| على العدد الآخر | في عدة | عشرات | في الآحاد |
| | تكرار العشرة | | |

$$= (١٠ أ ن + ١٠ ب ن + ١٠٠ ن + أ ب)$$

وبإجراء عملية ضرب القوسين (أ + ١٠ ن) (ب + ١٠ ن) نحصل على نفس

النتيجة . ومن ثم فالقاعدة صحيحة

في المثال : المطلوب إيجاد حاصل ضرب ٢٣ × ٢٥

$$\text{الجواب : } [٢٥ + ٣] \times ٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥$$

$$= ٥٦٠ + ١٥ = ٥٧٥$$

قاعدة فيما اختلف عدّة عشرات ممّا بين

العشرين والمائة

تضرب عدّة عشرات الأقلّ في مجموع الأكثر ، وتزيد عليه مضروب آحاد الأقلّ في عدّة عشرات الأكثر ، وتبسّط المجتميع عشرات ، وتضيف إليه مضروب الآحاد في الآحاد .

مثالها : ثلاثة وعشرون في أربعة وثلاثين .

فزد على الثمانية والسّتين تسعة ، وأضف إلى السّبعمئة والسبعين ، اثني عشر ، (حصل المطلوب)^(١) .

قاعدة :

كلّ عددين مُتفاضِلَيْن (أى غير متساويين)^(١) نصف مجموعهما مُفَرَّدٌ ، تجمعهما . وتضرب نصف المجتميع في نفسه ، وتُسَقِّط من الحاصل مضروب نصف التفاضل بينهما في نفسه . (فالباقي هو المطلوب)^(١) .

مثالها : أربعة وعشرون في ستّة وثلاثين .

فاستقِط من التسعمئة (مضروب نصف التفاضل في نفسه ، أعني)^(٢) ستّة وثلاثين ، يبقى ثمانمئة وأربعة وستون .

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

شرح : في « قاعدة فيما اختلف عدّة عشرات مما بين العشرين والمائة » نفرض العددين (أ + ١٠ ن) ، (ب + ١٠ ن) حيث ن_١ ، ن_٢ عدة تكرار العشرات فيهما . ن_١ أقل من ن_٢ .

فيكون العدد الأقل (أ + ١٠ ن)

والعدد الأكبر (ب + ١٠ ن)

= فطبقا للقاعدة :

$$\text{حاصل الضرب} = [\text{ن} (\text{ب} + 10 \text{ ن}) + \text{أ ن}] \times 10 + \text{أ ب}$$

عدة عشرات العدد الأكبر مضروب آحاد بسط مضروب الأقل
الأقل في عدة المجتمع الآحاد
عشرات الأكبر عشرات في الآحاد

$$= (10 \text{ ب ن} + 100 \text{ ن} + 10 \text{ أ ن} + \text{أ ب})$$

وعند ضرب العددين (أ + 10 ن) ، (ب + 10 ن) في بعضهما البعض نحصل على نفس النتيجة ، ومن ثم فالقاعدة سليمة .

وفي المثال : 23×34

$$\text{يكون الجواب : } [3 \times 3 + (34 \times 2)] \times 10 + 4 \times 3$$

$$= 782 = 12 + 770 = 12 + 10 \times (9 + 68)$$

وفي القاعدة التالية نفرض العددين المتفاضلين (المختلفين) ع₁ ، ع₂ فيكون حاصل ضربهما - طبقا للقاعدة - هو :

$$\left(\frac{\text{ع}_1 - \text{ع}_2}{2} \right) - \left(\frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2} \right)$$

مضروب نصف مجموع العددين في نفسه مضروب نصف التفاضل (الفرق) بين العددين في نفسه

أى أن حاصل الضرب قد تم تحويله إلى فرق بين مربعين وبايجاد هذا الفرق نحصل على :

$$\left(\frac{\text{ع}_1 - \text{ع}_2}{2} \right) - \left(\frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2} \right) = \left(\frac{\text{ع}_1 - \text{ع}_2}{2} \right) - \left(\frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2} \right)$$

$$= \text{ع}_1 \text{ع}_2$$

وبذلك تثبت صحة القاعدة .

وفي المثال : 24×36

$$\text{حاصل الضرب} = \left(\frac{24 - 36}{2} \right) - \left(\frac{24 + 36}{2} \right)$$

$$= 26 - 30 = 900 - 36 = 864$$

قد يسهّل الضرب بأن تنسب أحد المضروبين إلى أول أعداد مرتبة فوقه ، وتأخذ بتلك النسبة من الآخر ، وتبسّط المأخوذ من جنس المنسوب إليه ، والكسر بحسبه .

مثالها : خمسة وعشرون في اثني عشر .

تنسب الأول إلى المائة بالربّع . وتأخذ ربع الاثنى عشر ، وتبسّط المئات ^(١) .

أو في ثلاثة عشر .

فربعها ثلاثة وربع ، فيحصل ^(٢) ثلاثمائة وخمسة وعشرون .

قاعدة

قد يسهّل الضرب بأن تُضعف أحد المضروبين مرّة فصاعدًا ، وتنصف الآخر بعِدّة ذلك ، وتضرب ما صار إليه أحدهما ، فيما صار إليه الآخر .

مثالها : خمسة وعشرون في سبعة عشر .

فلو ضُعِفَ الأول مرتين ، ونُصِفَ الثاني كذلك ، لرجع إلى ضرب أربعة في مائة ، وهو أظهر .

تبصرة

فإن تكثرَ المراتبُ ، وتَشَعَّبَ العملُ ، فاستعن بالقلم .

فإن كان ضرب مُفَرَّدٍ في مركّبٍ فارسمها ، ثم اضرب المُفَرَّدَ بصورته في المرتبة

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : مائة .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : فالجواب .

الأولى ، وارسُم آحاد الحاصلِ تحتها ، واحفظ لعشراته آحادًا بعددتها لتزيدها على حاصل ضرب ما بعدها إن كان عددًا ، وإن كان صفرًا ، رَسَمْتَ^(١) عِدَّة العشرات تحتها^(٢) ، وإن لم يحصل آحادٌ ، فضع صفرًا ، حَافِظًا لكلِّ عشرة^(٣) واحدًا ، لتفعل به ما عرفت ، ومتى ضربت في صفرٍ ، فارسم صفرًا ، أو إن كان مع المفرد أصفارًا فارسمها عن يمين سطر الخارج .

مثالُه : خمسةٌ في هذا العدد ٦٢٠٤٣ ، فصورة العمل هكذا^(٤) :

$$\begin{array}{r} 62043 \\ \times 5 \\ \hline 310215 \end{array}$$

ولو كانت خمسمائة لزدت عليه^(٥) قبل سطر الحاصلِ صفرين ، هكذا :

$$\begin{array}{r} 62043 \\ \times 500 \\ \hline 31021500 \end{array}$$

وإن كان ضربُ مركَّبٍ في مركَّبٍ ، فالطُّرُق فيه كثيرةٌ ، كالشَّبكة ، وضرب التَّوْشِيح والمحاذات وغيرها .

والأظهرُ الشَّبكةُ ، ترسم شكلًا ذا أربعة أضلاعٍ ، وتقسم إلى مربَّعات ، وكلًّا منها إلى مُثْلَين ، فوقانيّ وتحتانيّ بخطوطٍ مُورَّبةٍ كما سترى ، وتضع أحد المضروبين فوقه ، كلَّ مرتبةٍ على مربَّعٍ ، والآخر عن يساره ، فالآحاد تحت العشرات ، وهى

(١) في المخطوط ٧٥٣ : ترسم .

(٢) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٣) في المخطوط ٧٥٣ : عشرته .

(٤) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(٥) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

تحت المئات ، وهكذا ، ثم اضرب صُورَ المفردات كُلًّا في كلٍّ ، وضع الحاصل في مُربّع يُحاذيها ، آخاذه في ^(١) المثلث التحتاني ، وعشراته في فوقاني ، واترك المربعات المحاذية للصفر خالية ، فإذا تمّ الحشو فضع ما في المثلث التحتاني الأيمن تحت الشكل ، فإن خلا فصيفراً ، وهو أول مراتب الحاصل ، ثم اجمع ما بين كلّ خطّين مورّبين ، وضع الحاصل عن يسار ما وضعت أولاً ، فإن خلا فصيفراً ، كما في الجمع .

مثاله : هذا العدد ٦٢٣٧٤ في هذا العدد ٢٠٧ وصورة الشبكة والعمل هكذا :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ٦ | ٢ | ٣ | ٧ | ٤ |
| ٢ | ١ | ٢ | ٦ | ٤ | ١ |
| ٧ | ٤ | ١ | ٢ | ٦ | ١ |
| ١ | ٢ | ٩ | ١ | ٤ | ٨ |

والامتحان بضرب ميزان المضروب ، (في ميزان المضروب) ^(٢) فيه ، فيزان الحاصل إن خالف ميزان الخارج ، فالعمل خطأ .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : من .

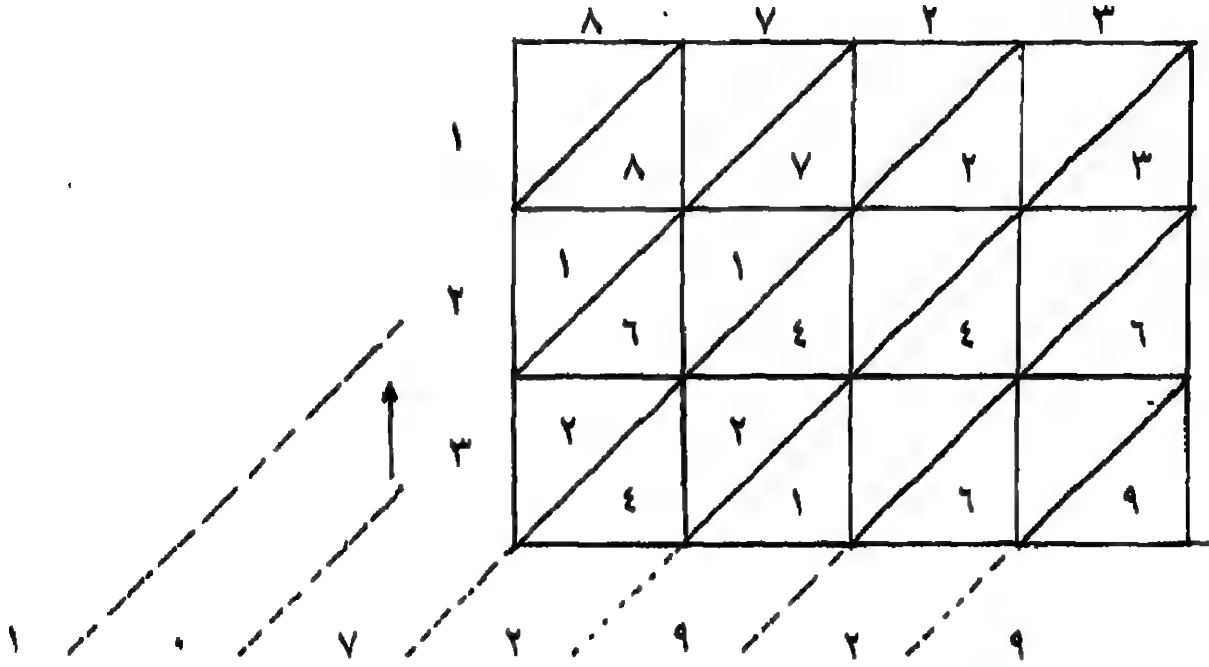
(٢) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : في هذه التبصرة يبدأ العامل بشرح كيفية ضرب عدد مفرد في عدد مركب ، وهي بعينها نفس الطريقة التي نستعملها اليوم .

أما عند ضرب عددين مركبين في بعضهما البعض فإن العامل يخص بالشرح طريقة الشبكة ، ونشرحها بالمثال التالي :

المطلوب إيجاد حاصل ضرب : ۱۲۳×۸۷۲۳

إنشاء الشبكة



$$۱۰۷۲۹۲۹ = ۱۲۳ \times ۸۷۲۳ \therefore$$

خطوات العمل :

(۱) نرسم مستطيلاً ونقسمه إلى مربعات بحيث يكون عدد المربعات في الاتجاه الأفقي مساوياً لعدد أرقام المضروبين . ويكون عدد المربعات في الاتجاه الرأسى مساوياً لعدد أرقام المضروب الآخر .

(۲) نقسم كل مربع إلى مثلثين مثلث علوى وآخر سفلى وذلك بواسطة خطوط مائلة كما هو موضح بالشكل .

(۳) نضع أرقام المضروب الأول فوق الشكل بحيث يقع كل رقم فوق مربع بحيث يكون رقم الآحاد عند المربع الأول يليه رقم العشرات في المربع التالى وهكذا حتى نهاية أرقام المضروب الأول .

= (٤) نضع أرقام المضروب الثانى إلى الجانب الأيسر للمستطيل بحيث يقع كل رقم منه أمام مربع ، مبتدئين برقم الآحاد عند أسفل مربع ثم رقم العشرات فى المربع الذى يعلوه وهكذا حتى نهاية أرقام المضروب الثانى .

(٥) نبدأ بضرب الرقم العلوى للمضروب الثانى (وهو رقم أعلى مرتبة فيه) فى المضروب الأول واضعين حاصل ضرب كل رقم فى الآخر فى المربع الخاص به بحيث يكون آحاد حاصل الضرب فى المثلث السفلى من المربع ورقم عشرات حاصل الضرب فى المثلث العلوى منه .

(٦) نكرر العمل بالنسبة لبقية أرقام المضروب الثانى .

(٧) نجمع الأرقام المتحصلة فى المستطيل ، وذلك فى الاتجاه القطرى (أى فى اتجاه الخطوط المورّبة) بادئين من اليمين إلى اليسار ، بحيث نجمع كل ما بين خطين مورّبين ونضيف رقم العشرات إلى مجموعة الأرقام فى الخطين المورّبين التاليين وهكذا لنحصل على حاصل الضرب بطريق الشبكة .

هذا ويمكننا تحليل طريقة الشبكة بمقارنتها بطريقة الضرب التى نستعملها اليوم ، فى هذه الطريقة نبدأ بضرب رقم آحاد المضروب الثانى فى أرقام المضروب الأول ، ثم رقم عشرات المضروب الثانى (ويكون حاصل الضرب مبتدئاً من خانة العشرات - أى مُرحّلاً إلى رتبة أعلى) ، وبعد ذلك نضرب رقم مئات المضروب الثانى فى المضروب الأول ، ويكون حاصل الضرب مبتدئاً من خانة المئات ، ثم نجمع المتحصل من عمليات الضرب الجزئية هذه .

وطريقة الشبكة لا تختلف - فى جوهرها - عن طريقتنا الحالية ، إلا أنه فى طريقة الشبكة يُبدأ بضرب رقم أعلى رتبة فى المضروب الثانى فى المضروب الأول ، ثم المرتبة الأقل . ويلاحظ أن الترتيب الهندسى للشبكة (المثلثات الفوقانية والتحتانية) تؤدى مباشرة إلى ترحيل الأرقام إلى الرتبة الأقل ، ويتضح ذلك بجملاء عند مقارنة الأرقام فى الخطوط المورّبة مع الأرقام فى الأعمدة الرأسية فى المثال المشروح (٨٧٢٣ × ١٢٣) حيث نجد تطابقاً تاماً بينها .

| | طريقة الشبكة | الطريقة الحالية | |
|------------------------------|----------------------|----------------------|------------------------------|
| المضروب الأول | ٨ ٧ ٢ ٣ | ٨ ٧ ٢ ٣ | المضروب الأول |
| المضروب الثانى | ١ ٢ ٣ | ١ ٢ ٣ | المضروب الثانى |
| الضرب من اليمين إلى اليسار . | | | الضرب من اليمين إلى اليسار . |
| ضرب المئات | ٨ ٧ ٢ ٣ | ٢ ٤ ١ ٦ ٩ | ضرب الآحاد |
| | ١ | ٢ | |
| ضرب العشرات | ١ ٦ ٤ ٤ ٦ | ١ ٦ ٤ ٤ ٦ ٠ | ضرب العشرات |
| | ٢ | ١ | |
| ضرب الآحاد | ٢ ٤ ١ ٦ ٩ | ٨ ٧ ٢ ٣ ٠ ٠ | ضرب المئات |
| | <u>١ ٠ ٧ ٢ ٩ ٢ ٩</u> | <u>١ ٠ ٧ ٢ ٩ ٢ ٩</u> | |

مما تقدم تتضح سلامة طريقة الشبكة فى إجراء عملية ضرب الأعداد المركبة بعضها فى بعض . ونظراً لسهولة عمليات الضرب الجزئية فيها مما لا يُحتاج معه إلى إستيعاب أى عدد محفوظ ، فإن هذه الطريقة قد تكون أبسر وأقل خطأً للمبتدئين من طريقة الضرب التى تتبعها فى عصرنا الحالى .

وللتحقق من سلامة عملية الضرب يمكن تطبيق القاعدة الذهبية كما سماها الغربيون وهى قاعدة ميزان العدد التى سبق شرحها .

ميزان المضروب × ميزان المضروب فيه = ميزان حاصل الضرب
أو ميزان المضروب الأول × ميزان المضروب الثانى = ميزان حاصل الضرب
وبتطبيقها على المثال الوارد فى المخطوط :

$$١٢٩١١٤١٨ = ٢٠٧ \times ٦٢٣٧٤$$

فبإسقاط تسعة تسعة نحصل على موازين الأعداد

$$١ \times \text{صفر} = \text{صفرًا}$$

وبتطبيق القاعدة على المثال المشروح :

$$١٠٧٢٩٢٩ = ١٢٣ \times ٨٧٢٣$$

$$(٦ \times ٢)$$

$$٣ = ٣$$

∴. فعمليات الضرب صحيحة .

الفصل الخامس

في القسمة

وهي طلب عددٍ نسبتُهُ إلى الواحدِ كنسبةِ المقسومِ إلى المقسوم عليه ، فهي عكسُ الضربِ ، والعملُ فيها أن تطلبَ عددًا إذا ضربته في المقسوم عليه ، يساوى الحاصلُ المقسومَ أو نقص عنه بأقل من المقسوم عليه ، فإن ساواه ^(١) فالمفروضُ خارجُ القسمة ، وإن نقص عنه كذلك فانسب ذلك الأقل إلى المقسوم عليه ، فحاصلُ النسبة مع ذلك العدد هو الخارج ، فإن تكثرت الأعدادُ فارسم جدولاً سطورُهُ بعدةِ مراتبِ المقسوم ، وضَعُها خلالها . والمقسوم عليه تحته بحيث يحاذي آخرُهُ آخرُهُ إن لم يزد المقسوم عليه عن محاذيه من المقسوم إذا حاذاه ، وإلا فبحيث يُحاذي متلو آخر المقسوم ، ثم تطلب أكثر عددٍ من الآحاد يمكن ضربُهُ في واحدٍ (واحدٍ) ^(٢) من مراتبِ المقسوم عليه ، ونقصان الحاصل مما يحاذيه من المقسوم ، ومما على يساره إن كان شيء ، واضعًا للباقي تحت خطٍ فاصلي . فإذا وجدته وضعتُه فوق الجدول محاذيًا لأول مراتبِ المقسوم عليه ، وعملت به ما عرفت ثم تنقل المقسوم عليه إلى اليمين بمرتبة أو ما بقي من المقسوم إلى اليسار بعد خطٍ عرضيٍّ ، ثم تطلب أعظمَ عددٍ آخر كما مر ، وضَعُه عن يمين الأول ، واعمل به ما عرفت ، فإن لم يوجد فضعُ صفرًا ، وانقل كما مر وهكذا ليصير أولُ المقسوم مُحاذيًا لأول المقسوم عليه ، فيكون الموضوعُ أعلى ^(٣) الجدول خارجَ القسمة ، فإن بقي من المقسوم شيء فهو كسْرٌ ، محرّجُهُ المقسوم عليه .

(١) في المخطوط ٧٥٣ : ساوى .

(٢) زائدة في المخطوط ٧٥٣ .

(٣) في المخطوط ٧٥٣ : على .

مثاله : تقسيم هذا العدد ٩٧٥٧٤١ على هذا العدد ٥٣ فخارج القسمة ١٨٤١٠
 من الصحيح ، وأحد عشر^(١) جزءاً من ثلاثة وخمسين إذا فرض واحداً ،
 وهذه صورته :

| | ١ | ٨ | ٤ | ١ | . |
|---|---|---|---|---|---|
| ٩ | ٧ | ٥ | ٧ | ٤ | ١ |
| ٥ | ٣ | | | | |
| ٤ | ٤ | | | | |
| ٤ | ٠ | | | | |
| | ٤ | | | | |
| | ٢ | ٤ | | | |
| | ٢ | ١ | | | |
| | ٢ | ٠ | | | |
| | | ١ | | | |
| | | ١ | ٢ | | |
| | | ٠ | ٥ | | |
| | | | ٥ | ٣ | |
| | | | ٠ | ١ | ١ |
| | | | | ٥ | ٣ |
| | | | ٥ | ٣ | |
| | | ٥ | ٣ | | |
| | ٥ | ٣ | | | |
| ٥ | ٣ | | | | |

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : ستة وأربعين ، وهو ولا شك خطأً وتحريف.

والامتحان بضرب ميزان الخارج ، في ميزان المقسوم عليه ، وزيادة ميزان الباقي إن وجد^(١) على الحاصل ، فميزان المجتَمع إن خالف ميزان المقسوم . فالعملُ خطأ .

(١) في المخطوط ٧٥٣ : كان .

شرح : طريقة القسمة الواردة في المخطوط لا تختلف في جوهرها عن الطريقة التي تتبعها في عصرنا الحالى ، إنما يقع الخلاف في مواضع كتابة المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة . فبالنسبة للمثال المذكور يمكن مقارنة الحل على صورته الحالية مع الحل الموجود في المخطوط .

| | | | |
|--------------|-----------------------|--------|---------|
| المقسوم عليه | ٥٣ | ٩٧٥٧٤١ | المقسوم |
| | | ٥٣ | |
| | | ٤٤٥ | |
| | | ٤٢٤ | |
| | | ٢١٧ | |
| | | ٢١٢ | |
| | | ٥٤ | |
| | | ٥٣ | |
| | | ١١ | |
| ناتج القسمة | $١٨٤١٠ \frac{١١}{٥٣}$ | | |

لنتأكد لنا أننا لم نزد شيئاً - في الواقع - عما عرفه العرب قبلاً في موضوع القسمة .

الفصل السادس

في استخراج الجذر^(١)

العدد المضروب في نفسه يُسمَّى جذرًا في المُحاسبات ، وضلعًا في المساحة ،
وشيئًا في الجبر والمقابلة ، ويُسمَّى الحاصلُ مجذورًا ، ومربعًا ، ومالًا .

والعدد إن كان قليلًا فاستخراج جذره لا يحتاج إلى تأملٍ إن كان مُنطَقًا ، وإن
كان أصمًّا ، فأسقط منه أقرب المجذورات إليه ، وانسب الباقي إلى مضَعف جذر
المُسقط مع الواحد ، فجذرُ المسقط مع حاصلِ النسبة هو جذرُ الأصمِّ بالتقريب ،
وإن كان كثيرًا فضعه خلال جدولٍ كالمقسوم ، وعَلِّم مراتبه بتخطي مرتبة ،
مرتبة^(٢) ، ثم اطلب أكثر عدد من الآحاد ، وإذا ضرب في نفسه ونقص الحاصل
مما يحاذي العلامة الأخيرة ، ومما عن يساره أفناه أو بقي أقل من المنقوص منه ، فإذا
وجدته وضعته فوقها وتحتها بمسافة ، وضربت التحتاني في فوقاني ، ووضعت
الحاصل تحت العدد المطلوب جذره بحيث يُحاذي آحاده المضروب فيه ، ونقصته مما
يحاذيه ، ومما عن يساره ، ووضعت الباقي تحته بعد الفاصلة ، ثم تزيد فوقاني على
التحتاني ، وتنقل الجميع إلى اليمين بمرتبة ، ثم تطلب أعظم عددٍ كذلك إذا وضعته
فوق العلامة التي قبلَ العلامة الأخيرة وتحتها أمكن ضربه في مرتبة مرتبة من التحتاني ،
ونقصان الحاصل مما يحاذيه ، ومما عن يساره ، فإذا وجدته وعملت به ما عرفت
زدت فوقاني على التحتاني ، ونقلت ما في السطر التحتاني إلى اليمين بمرتبة ، وإن
لم يوجد فضع فوق العلامة وتحتها صفرًا وانقل وهكذا إلى أن يتمَّ العملُ ، فما فوق

(١) الجذر بفتح الجيم وكسرهما ويسكون الدال المعجمة أصل الشيء .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ .

الجدول هو الجذر ، فإن لم يبق شيء تحت الخطوط الفواصل ، فالعدد مُنْطَقٌ ، وإن بقي فأصمٌ ، وتلك البقيَّةُ كسرٌ مخرجها ما يحصل من زيادة ما فوق العلامة الأولى مع واحد على التحتاني .

مثاله : أردنا جذر هذا العدد ١٢٨١٧٢ ، عملنا ما قلنا صار هكذا :

| ٣ | ٥ | ٨ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ٢ | ٨ | ١ | ٧ | ٢ |
| | ٩ | | | | |
| | ٣ | | | | |
| | ٣ | ٠ | | | |
| | | ٨ | | | |
| | | ٢ | ٥ | | |
| | | ٥ | ٦ | | |
| | | ٥ | ٦ | | |
| | | | | ٦ | ٤ |
| | | | | | ٨ |
| | | | ٧ | ١ | ٧ |
| | | | ٧ | ٠ | ٨ |
| | ٣ | ٦ | ٥ | | |

وما بقي^(١) تحت الخطوط الفواصل ثمانية ، فهي كسر مخرجها الحاصل من زيادة ما فوق العلامة الأولى ، وواحد على التحتاني ، أعني ٧١٧ .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ :

والامتحان بضرب ميزان الخارج في نفسه ، وزيادة ميزان الباقي إن كان على
الحاصل ، فميزان المجتمع إن خالف ميزان العدد فالعمل خطأ ، والله أعلم .

شرح : في صدر هذا الفصل يعرف العاملى الجذر والضلع والشيء - كذا المجذور
والمساحة والمال - ويمكن بيان ذلك مُدْعَمًا بالرموز بقصد الإيضاح على الوجه التالى :

| العدد | العدد مضروب في نفسه |
|----------------------|---|
| في المحاسبات : | المجذور (الذى يمكن حذره) ع ^٢ |
| في المساحة : | المساحة ل ^٢ |
| في الجبر والمقابلة : | المال س ^٢ |

ويبدأ العاملى بتقديم طريقة تقريبية لإيجاد الجذر العريعى للعدد الأصم ع الذى
يمكن وضعه على الصورة :

$$ع = (ن + م)$$

حيث ن^٢ أقرب المجذورات إلى ع
، م الباقي بعد إسقاط ن^٢ من ع

فطبقاً لمن المخطوط نحصل على $\overline{ع}$ من العلاقة المُقَرَّبة :

$$\overline{ع} = (ن + \frac{م^2}{٢ن + ١}) = \text{جذر العدد الأصم ع}$$

ويجىء الكلام مرة ثانية عن هذه القاعدة في القسم الثانى من هذا الكتاب عند تحليلنا
لما جاء بكتاب العاملى «الكشكول» .

هذا وقد سبق لأبى بكر محمد بن الحسن الكرخى أن أورد هذه القاعدة في كتابه
«كافى الحساب» الذى ألفه بين سنتى ٤٠١ ، ٤٠٧ هـ (١٠١٠ - ١٠١٦ م) ،
وأهداه إلى الوزير أبى غالب محمد بن خلف الذى اشتهر بلقب «فخر الملك» .

= ويُنسبُ إلى الكرخي استخراج هذه القاعدة بطريقة جبرية ، كذلك وردت قاعدة مُشابهة في كتاب «تلخيص أعمال الحساب» لابن البتّا المراكشي الذي عاش في الفترة من سنة ٦٥٤ هـ إلى سنة ٧٢١ هـ (١٢٥٦ - ١٣٢١ م) .

وجدير بالذكر أن البابليين كانوا يستعملون - في استخراج الجذور الربيعية - القاعدة التالية :

$$\sqrt[n]{m + n^2} = \left(\frac{m}{n} + n \right)$$

وقد وردت هذه القاعدة في كتابات محمد بن موسى الخوارزمي ، إلا أنها كانت محلاً للنقد ، فعلمها الرياضيون العرب من بعده لتصبح على النحو التالي :

$$\sqrt[n]{m + n^2} = \left(\frac{m}{1 + n^2} + n \right)$$

وهي نفس الصورة التي أشار إليها العامل .

ويُنسب إلى أحمد بن إبراهيم الإقليدسي الذي عاش في القرن العاشر للميلاد أنه لما رأى أن :

المقدار $\left(\frac{m}{n} + n \right)$ - حسب قاعدة البابليين - يُعطي جذورًا تزيد عن القيم الحقيقية ،

وأن المقدار $\left(\frac{m}{1 + n^2} + n \right)$ - حسب تعديل الرياضيين العرب - يُعطي قيمًا أقل من الحقيقة ،

فقد اقترح قيمة وسطا بينهما على النحو التالي :

$$\sqrt[n]{m + n^2} = \frac{1}{2} + n + \left[\frac{m}{1 + n^2} + \frac{m}{n^2} \right]$$

الباب الثاني

في حساب الكسور

وفيه ثلاث مقدمات وستة فصول

المقدمة الأولى

كل عددين غير الواحد إن تساويا فتماثلان^(١) ، وإلا فإن أفنى أقلهما الأكثر فتداخلان^(٢) ، وإلا فإن عدّهما ثالثٌ فتوافقان^(٣) . والكسر الذي هو مخرجه فهو وفقهما . وإلا فتباينان^(٤) . والتماثل بيّنٌ ، ويُعرف البواقي بقسمة الأكثر على الأقل . فإن لم يبق شيءٌ فتداخلان . وإن بقي قسّمنا المقسوم عليه على الباقي ، وهكذا إلى أن لا يبقى شيءٌ فالعددان متوافقان ، والمقسوم عليه الأخير هو العاقل لهما ، أو يبقى واحدٌ فتباينان .

ثمّ الكسر إمّا مُنطَقٌ ، وهو الكسور التسعة المشهورة ، أو أصمٌ ولا يمكن التعبير عنه إلا بالجزء ، وكلٌّ منهما إمّا مُفَرَّدٌ كالثُلث ، وجزء من أحد عشر ، أو مكرّرٌ كالثلثين وجزءين من أحد عشر . أو مضاف كنصف سدسٍ ، وجزء من أحد عشر من الجزء من ثلاثة عشر ، أو معطوف كالنّصف والثلث ، وجزء من أحد عشر ، وجزء من ثلاثة عشر ، وإذا رُسِمَتِ الكسر ، فإن كان معه صحيحٌ ، فارسمه فوقه ، والكسر تحته ، فوق المخرج ، وإلا فضع صفراً مكانه ، وفي المعطوف يرسمون الواو .

شرح : (١) العددان المتماثلان هما العددان المتشابهان من كل الوجوه أى المتساويان ، كسبعة وسبعة ، والكسران المتماثلان هما الكسران المتساويان كربع وربع .

(٢) العددان المتداخلان هما العددان المختلفان اللذان يفنى أصغرهما أكبرهما ، أو بعبارة أخرى أن يكون العدد الأكبر فيها قابلاً للقسمة على العدد الأصغر ، مثال ذلك ٨ ، ٢ ، فهما متداخلان حيث إننا إذا انقصنا الاثنين من الثمانية أربع مرات لم يبق =

وفي الأصمّ المضاف من ، فالواحد ، والثلاثان هكذا $\frac{1}{2}$ ، ونصف خمسة أسداس هكذا : $\frac{1}{5}$ والخمسان وثلاثة أرباع هكذا : $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ ، وجزء من أحد عشر من جزء من ثلاثة عشر هكذا : $\frac{1}{11}$ (أو $\frac{1}{13}$ من $\frac{1}{13}$)^(٥) .

(٥) كما في المخطوط ١٢٥٣ .

منها شيء ، أي أن الاثنين تُفنى الثمانية ، أو بعبارة ثالثة فإنه بقبول الثمانية للقسمة على الاثنين فإن الثمانية تكون مُكوّنة من عدد صحيح من الاثنين بحيث إنه بإسقاط اثنين من الثمانية لعدد من المرات يساوي العدد الصحيح الناتج من القسمة فإنه لا يبقى من الثمانية شيء ، فنقول إن الاثنين تُفنى الثمانية ، وبعبارة رابعة يمكننا القول بأنه في العددين المتداخلين يكون العدد الأصغر أحد عوامل العدد الأكبر أو مجموعة من عوامله مضروبة في بعضها البعض كالعددين ١٨ ، ٦ ، فعوامل العدد ١٨ هي ٢ ، ٣ ، ٣ ، أي أن $18 = 2 \times 3 \times 3$ ، وكذلك العدد ٦ عوامله ٢ ، ٣ ، أي أن $6 = 2 \times 3$ ، فتكون الستة مجموعة من عاملين من عوامل العدد ١٨ وهما 2×3 ، ومن الواضح أن ١٨ تقبل القسمة على ٦ وتكون نتيجة القسمة ٣ ، ولو أسقطنا العدد ٦ من العدد ١٨ مرة واحدة يكون الباقي ١٢ ، ومرتين يكون الباقي ٦ ، ومرة ثالثة لا يبقى شيء ، فيقال إن الستة تُفنى الثمانية عشر ، فهما عددان متداخلان .

(٣) العددان المتوافقان هما العددان اللذان يقبلان القسمة على عدد ثالث . هو أحد عواملهما بالطبع . مثال ذلك العددان ٦ ، ٩ فإنهما يقبلان القسمة على ٣ . وبالتالي فالعدد ٣ عامل مشترك بينهما ، أي أحد العوامل الأولية (الأضلاع) لكل منهما .

(٤) العددان المتباينان هما العددان المختلفان اللذان لا يشتركان في عامل من عواملهما الأولية . وبالتالي ليس لهما عامل مشترك إلا الواحد . مثال ذلك العددان ١٣ ، ١٩ .

المقدمة الثانية

مخرجُ الكسرِ أقلُّ عددٍ يصحُّ منه ذلك الكسر . فمخرجُ المُفرد ظاهر ، وهو بعينه
مخرج المكرر . ومخرجُ المضاف مضروبُ مخارج مُفرداته بعضها في بعض ، أمّا
المعطوفُ فاعتبر مخرجى كسرتين منه ، فإن تباينا . فاضرب أحدهما في الآخر ، أو
توافقا فاضرب وفقَّ أحدهما في الآخر . أو تداخلا فاكثف بالأكثر . ثم اعتبر
الحاصلَ مع مخرج الكسر الثالث . واعمل ما عرفت وهكذا وهكذا^(١) ، فالحاصل هو
المطلوبُ . في تحصيل مخرج الكسور التسعة تضرب الاثنين في الثلاثة للتباين ،
والحاصل في نصف الأربعة للتوافق ، والحاصل في الخمسة للتباين ، والستة داخلة
في الحاصل فاكثف به ، واضربه في السبعة للمباينة . والحاصل في ربع الثمانية .
والحاصل في ثلث التسعة للتوافق . والعشرة داخلة في الحاصل ، وهو ألفان
وخمسمائة وعشرون فاكثف به وهو المطلوب^(٢) .

تَمَّة :

ولك أن تعتبر مخارج مفرداته . فما كان منها داخلاً في غيره فأسقطه واكتف
بالأكثر . وما كان متوافقاً فاستبدل به وفقه ، واعمل بالوفق . كذلك ليثول المخارج
الباقية إلى التباين ، فاضرب بعضها في بعض ، والحاصل هو المطلوب .

في المثال تسقطُ الاثنين . والثلاثة والأربعة والخمسة لدخولها في البواقي .
والستة تُوافق الثمانية بالتصنيف . فاستبدل بها نصفها ، وهو داخل في التسعة
فأسقطه ، والثمانية توافق العشرة بالنصف ، فاضرب خمسة في الثمانية ، والحاصل
في السبعة ، والحاصل في التسعة ليخرج المطلوب .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) راجع الشرح في نهاية المقدمة .

لطيفة :

يحصلُ مخرجُ الكسور التسعة من ضرب أيام الشهر في عدَّة الشُّهُور . والخاصل
في أيام الأسبوع . ومن ضرب مخارج الكسور التي فيها حرفُ العين بعضها في بعض .
وسُئِلَ أميرُ المؤمنين عليٌّ رضي الله عنه . عن ^(١) ذلك . فقال اضرب أيام أسبوعك في
أيام سنتك ^(٢) .

(١) في المخطوط ٧٥٣ : من .

شرح : (٢) في هذه « اللطيفة » يعرض العامل لإيجاد مخرج الكسور التسعة . أى
لإيجاد القاسم المشترك الأصغر لهذه الكسور التسعة . ولنبين أولاً المقصود بإيجاد القاسم
المشترك الأصغر . فنفرض أن المطلوب مثلاً هو جمع الكسرين $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، فنبدأ
بتوحيد مخرجي الكسرين بأن نُحوِّل كلاً من الكسرين إلى كسر مخرجه (أى مقامه)
سنة (أى 2×3 حاصل ضرب مخرجي الكسرين) ، فيصير الكسران : $\frac{2}{6}$ ، $\frac{3}{6}$ ،
وفي هذه الحالة يتيسر الجمع فتكون النتيجة $\frac{5}{6}$ ، وعملية توحيد مخرجي الكسرين
تقتضى إيجاد ما نسبه بالقاسم المشترك وهو حاصل ضرب المخرجين في صورته العامة ،
إلا أنه مع تعدد الكسور وبالتالي تعدد مخارجها فإن إيجاد القاسم المشترك بهذه الكيفية -
على بساطتها - لا يعطينا أصغر قاسم مشترك . ولنوضح ذلك بمثال فنقول إن المطلوب
مثلاً هو حاصل جمع الكسور $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{9}$ ، فنالمسور أن نقول إن القاسم
المشترك هو حاصل ضرب المخارج الأربعة بعضها في بعض هكذا :
 $2 \times 3 \times 4 \times 9$ ، إلا أن هناك قاسماً مشتركاً أصغر من هذا القاسم . وبالتالي فإن
إيجاده يؤدي إلى تبسيط أكثر للعمليات الخاصة بالكسور ، ولذلك نقول إن المخارج
الأربعة هي على التوالي :

$$2 ، 3 \times 2 ، 2 ، 3$$

ولذلك فإن القاسم المشترك الأصغر يكون حاصل ضرب الأعداد الأولية مرفوعة إلى
أعلى قوة لها . فنجد مثلاً أن الاثنين في المخرجين الأولين موجودة في المخرج الثالث
فيمكن الاكتفاء به عن العامل الأول ٢ ، كذلك فإن الثلاثة في المخرج الثاني موجودة
ضمن المخرج الرابع ، وبالتالي يمكن الاكتفاء بالمخرج الرابع فيما يخص العامل =

= الأولى ٣ . وبذلك يكون القاسم المشترك الأصغر هو : 22×23 ، أى $8 \times 9 = 72$ ، وهو أبسط بكثير مما لو ضربنا جميع الخارج في بعضها البعض : $2 \times 6 \times 8 \times 9 = 72 \times 12$ ، في الوقت الذى يؤدي فيه القاسم المشترك الأصغر الغرض ، وهو توحيد مخارج الكسور حتى يتسنى إجراء عمليتي الجمع والطرح .

بعد هذه المقدمة نخرج إلى إيجاد مخرج الكسور التسعة ، فنقول إن الكسور التسعة المقصودة هي : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$

ويامعان النظر في مخارج هذه الكسور التسعة نجد أن المخرج ٨ يكفيها بالنسبة للعامل الأولى ٢ . كما أن المخرج ٩ يكفيها أيضًا بالنسبة للعامل الأولى ٣ . كذلك فالمخرجان ٧٠ يمثلان العاملين الأولين ٥ . ٧ . وبذلك يكون مخرج الكسور التسعة (أى القاسم المشترك الأصغر) هو :

$$2520 = 7 \times 360 = 7 \times 5 \times 9 \times 8$$

أى أن مخرج الكسور التسعة هو : $7 \times 12 \times 30$

أى : « عدد أيام الشهر \times عدد الشهور (عدد الشهور في السنة) \times عدد أيام الأسبوع » وهى القاعدة التى وردت في « لطيفة » العاملى .

وكذلك فقول أمير المؤمنين على كرم الله وجهه عن مخرج الكسور التسعة : « اضرب أيام أسبوعك في أيام سنّك » قول غاية في الصحة (360×7) .

ورد أيضًا في « لطيفة » العاملى أن مخرج الكسور التسعة يحصل من ضرب مخارج الكسور التى فيها حرف العين بعضها في بعض . وهو قول صحيح أيضًا . حيث إن الكسور التى فيها حرف العين هي : الربع . السبع . والتسع . والعشر . وحاصل ضرب مخارج هذه الكسور الأربعة هو : $4 \times 7 \times 9 \times 10 = 2520$. من هذا تبين صحة ما جاء في هذه « اللطيفة » .

المقدمة الثالثة

في التجنيس والرفع

أما التجنيسُ فجعلُ الصحيح كسورًا من جنسٍ كسرٍ مُعَيَّن ، والعملُ فيه إذا كانَ مع الصحيح كسرًا أن تضربَ الصَّحيحَ في مخرجِ الكسرِ ، وتزيدَ عليه صورةَ الكسرِ ، فمجئسُ الاثنين والرَّبعِ تسعةٌ ، ومجئسُ السَّتَّةِ وثلاثةُ أخماسٍ ثلاثةٌ وثلثون ، ومجئسُ الأربعةِ وثلاثِ سُبُعٍ خمسةٌ وثمانون .

وأما الرفعُ فجعلُ الكسورَ صحاحًا ، فإن كان مَعْنَا كسرٍ عدده أكثر من مخرجه قسَمناه على مخرجه ، فالخارجُ صحيحٌ ، والباقي كسرٌ من ذلك المخرج . فرفعُ خمسةِ عشر رُبْعًا (١) ثلاثةٌ وثلثةُ أرباعٍ .

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : يُقصد بالتجنيس جعلُ الصحيح والكسرِ المصاحب له من جنس واحد ، وذلك بالتعبير عنهما على هيئة كسرين لهما نفس مخرج الكسر ، ويسوق العاملُ ثلاثة أمثلة لذلك نبينها مشروحة فيما يلي :

$$٢ \frac{١}{٤} = ٢ + \frac{١}{٤} = \frac{٨}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٩}{٤}$$
 فيكون المجئس تسعة ، وهو عدد الكسر $\frac{٩}{٤}$ الذي مخرجه ٤ . وهو نفسه مخرج الكسر $\frac{١}{٤}$.

كذلك $\frac{٣٣}{٥} = \frac{٣٠}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٥}{٥} \times ٦ + \frac{٣}{٥} = ٦ \frac{٣}{٥}$

فالمجئس هنا ٣٣ .

وفي المثال الثالث : $\frac{١}{٣} \cdot \frac{١}{٧} = \frac{١}{٢١}$ ، $\frac{٢١}{٢١} \times ٤ + \frac{١}{٢١} = \frac{٨٥}{٢١}$

$= \frac{٨٤}{٢١} + \frac{١}{٢١}$ فالمجئس ٨٥ .

أما الرفع فهو تحويل الكسر الذي يزيد فيه عدده (أى بسطه) على مخرجه إلى عدد صحيح وكسر . ويورد العاملُ لذلك مثالا هو :

$\frac{١٥}{٤} = \frac{١٢}{٤} + \frac{٣}{٤} = ٣ \frac{٣}{٤}$ وهو المرفوع .

الفصل الأول

في جمع الكسور وتضعيفها

يؤخذ من المخرج المشترك مجموعها أو مُضَعَّفُها ، ويُقَسَمُ عددُها إن زاد عليه ^(١) ،
فالخارجُ صحاحُ والباقي كسورٌ منه ، وإن نقص عنه نسبٌ إليه ، وإن ساواه
فالحاصل واحدٌ ، فالنصفُ والثُلثُ والرُّبعُ واحدٌ ونصفُ سُدُسٍ ، والسُدُسُ والثُلثُ
نصفٌ ، والنصفُ والسُدُسُ والثُلثُ واحدٌ ، وضيَعُ ثلثة أخماسٍ واحدٌ وخمسةٌ .

الفصل الثاني

في تنصيف الكسور وتفريقها

أما التنصيفُ فإن كان الكسرُ زوجًا نصَّفته ، أو فردًا ضِعَّفت المخرج ، ونسبت
الكسر ^(٢) إليه وهو ظاهرٌ .

وأما التفريقُ فتنقص أحدهما من الآخر بعد أخذهما من المخرج المشترك ، وتنسب
الباقي إليه ، فإن نقصت الرُّبعُ من الثلث بقي نصفُ سُدُسٍ .

الفصل الثالث

في ضرب الكسور

إن كان الكسرُ في أحد الطرفين فقط مع صحيح أو بدونه ، فاضرب المجتسَّ أو
صورةَ الكسرِ في الصحيح ، ثم اقسِم الحاصلَ على المخرج أو انسبه منه ، ففي ضرب
اثنين وثلثة أخماسٍ في أربعةٍ ، المجتسَّ في الصحيح ، اثنان وخمسون ، قسمناه على
خمسةٍ ، خرجَ عشرةٌ وخمسان ، وفي ضرب ثلثة أرباعٍ في سبعةٍ ، قسمنا أحدًا
وعشرين على أربعةٍ خرجَ خمسةٌ وربعٌ ، وهو المطلوب . وإن كان الكسرُ في كلا

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : الكسور .

الطرفين والصحيح معها ، أو مع أحدهما أو لا ، فاضرب المجتس في المجتس ، أو في صورة الكسر . أو الصورة في الصورة . وهو الحاصل الأول . ثم المخرج في المخرج . وهو الحاصل الثاني . فاقسم الأول عليه . أو انسبه منه . فالخارج هو المطلوب . فالحاصل من ضرب الاثنين ونصف . في ثلاثة وثلاث . ثمانية وثلاث . ومن اثنين ورُبع في خمسة أسداس . واحد وسبعة أثمان . ومن ثلاثة أرباع في خمسة أسباع . نصف رُبع سبع .

الفصل الرابع في قسمة الكسور

وهي ثمانية أصناف كما يشهد به التأمل ، والعمل فيها أن تضرب كلاً من المقسوم عليه في المخرج المشترك ، إن كان مع كل منهما كسر ، أو في المخرج الموجود إن كان أحدهما فقط ذاك كسر ، ثم تقسم حاصل المقسوم على حاصل المقسوم عليه أو تنسبه منه ، فالخارج من قسمة خمسة ورُبع على ثلاثة ، واحد وثلاثة أرباع ، وبالعكس أربعة أسباع ، ومن السدسين على السدس ، اثنان ، كما يشهد به تعريف القسمة بما مر . وعليك استخراج باقي الأمثلة .

الفصل الخامس في استخراج جذر الكسور

إن كان مع الكسر صحيح ، جئس ليرجع الكل كسوراً ، ثم إن كان الكسر والمخرج مُنطقيين ، قسمت جذر الكسر على جذر المخرج ، أو نسبته منه ، فجذر ستة ورُبع اثنان ونصف ، وجذر أربعة أضعاف ثلثان .

وإن لم يكونا مُنطقيين ضربت الكسر في المخرج ، وأخذت جذر الحاصل بالتقريب وقسمته على المخرج ، ففي تجذير ثلاثة ونصف ، تضرب سبعة في اثنين ، وتأخذ جذر الحاصل بالتقريب ، وهو ثلاثة وخمسة أسباع ، وتقسمه على اثنين ليخرج واحد وستة أسباع .

الفصل السادس

في تحويل الكسر من مخرج إلى مخرج

اضرب عدد الكسر في المخرج المَحْوَلِ إليه ، واقسم الحاصل على مخرجه .
فالمخرج هو الكسر المطلوب . من مخرج المَحْوَلِ إليه . فلو قيل خمسة أسباع كم
ثُمَّناً . قَسَمْتَ أربعين على سبعة ، خرج خمسة أثمانٍ وخمسة أسباع ثَمْنٍ . ولو قيل
كم سُدُسًا ، فالجوابُ أربعة أسداسٍ وسُبْعًا سُدُسٍ .

شرح : في هذه الفصول الستة يعرض العامل لحساب الكسور من جمع
وتضعيف وتنصيف وتفريق وضرب وقسمة واستخراج جذور وتحويل الكسر من مخرج
إلى مخرج .

وتقوم هذه العمليات الحسابية على فكرة إيجاد المخرج المشترك . وفيما يلي
نسوق بعض الأمثلة التي أوردناها العامل للتدليل على القواعد التي ذكرها
في متن كتابه :

$$١ \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{6}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad (١)$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \quad (٢)$$

$$٨ \cdot \frac{1}{3} = \frac{٢٥}{3} = \frac{١٠}{3} \times \frac{٥}{2} = ٣ \cdot \frac{1}{3} \times ٢ \cdot \frac{1}{2} \quad (٣)$$

$$١ \cdot \frac{٧}{٨} = \frac{١٥}{٨} = \frac{٥}{6} \times \frac{٩}{٤} = \frac{٥}{6} \times ٢ \cdot \frac{1}{4}$$

$$١ \cdot \frac{3}{4} = \frac{٢١}{12} = ٣ \div \frac{٢١}{4} = ٣ \div ٥ \cdot \frac{1}{4} \quad (٤)$$

$$١ \cdot \frac{6}{7} \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{٥}{7} \quad \frac{١٤}{2} \cdot \frac{١٤}{4} = \frac{7}{2} \cdot ٣ \cdot \frac{1}{2} \quad ٢ \cdot \frac{1}{2} = \frac{٥}{2} = \frac{٢٥}{4} = ٦ \cdot \frac{1}{4} \quad (٥)$$

$$\frac{٥}{7} \cdot \frac{٥}{7} = \frac{1}{8} \times = \frac{٨ \times ٥}{٨ \times 7} = \frac{٥}{7} \quad (٦)$$

$$٤ \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{6} \times \frac{3٠}{7} = \frac{6 \times ٥}{6 \times 7} = \frac{٥}{7}$$

الباب الثالث

في استخراج المجهولات بالأربعة المناسبة

وهي مانسبةٌ أولها إلى ثانيها كنسبة ثالثها إلى رابعها ، ويلزمها مساواة مُسطَّح^(١) الطرفين لمسطَّح الوسطين كما بُرهن عليه . فإذا جُهلَ أحدُ الطرفين . فاقسم مُسطَّح الوسطين على الطرفِ المعلوم . أو أحد الوَسْطَيْنِ ، فاقسم مُسطَّح الطرفين على الوسط المعلوم ، فالخارجُ هو المطلوب .

والسؤال إما أن يتعلَّق بالزيادة والنقصان ، أو بالمعاملات ونحوها . فالأول نحو أى عدد إذا زيد عليه رُبْعُهُ صار ثلثَةً مثلاً . فالطريق أن تأخذَ مخرَجَ الكسْرِ . ويسمى المأخذ . وتتصرَّف فيه بِحَسَبِ السَّوَالِ . فما انتهت إليه يُسمَّى الواسطة . فيحصل مَعَكَ معلومات ثلث المأخذ والواسطة والمعلوم ، وهو ما أعطاه السائل بقوله صار كذا . ونسبة المأخذ وهو الأول . إلى الواسطة وهي الثاني . كنسبة المجهول وهو الثالث . إلى المعلوم وهو الرابع . فاضرب المأخذَ في المعلوم . واقسم الحاصلَ على الواسطة . ليخرجَ المجهولُ . فهو في المثال اثنان وخمسان ، وأمَّا الثاني فكما لو قيل خمسة أرطال بثلاثة دراهم . رطلان بكم . فخمسة أرطال المسعَّر . والثلثة السعَّر . والرطلان المثلَّث . والمسئولُ عنه الثمنُ . ونسبةُ المُسَعَّرِ إلى السعَّرِ كنسبة المثلَّث إلى الثمنِ . فالمجهولُ الرَّابِعُ . فاقسم مُسطَّح الوسطين وهو سِتَّةُ . على الأول وهو خمسةُ .

ولو قيل كم رطلاً بدرهمين . فالمجهولُ المثلَّث وهو الثالث . فاقسم مُسطَّح الطرفين وهو عشرةُ . على الثاني وهو ثلثةُ . ومن هنا أخذَ قولهم يُضْرَبُ آخرُ السؤال في غير جنسِهِ . ويُقسَّمُ الحاصلُ على جنسِهِ ، وهذا بابٌ عظيمُ النَّفعِ فاحفظ به .

(١) يقصد بالمسطح حاصل الضرب .

شرح : إذا رمزنا للمقادير الأربعة المتناسبة بالرموز : ا ، ب ، ح ، د ، فإنه طبقاً للتعريف الوارد يكون :

$$\frac{\text{الأول}}{\text{الثاني}} = \frac{\text{الثالث}}{\text{الرابع}} \quad , \quad \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

ويُسمَّى الرمزان أ ، د الطرفين . والرمزان ب ، ح الوسطين ، ولَمَّا كان مُسطَّحُ (أى حاصل ضرب) الطرفين مساوياً لمسطح الوسطين ، فإنَّ :

$$\text{أ} \times \text{د} = \text{ب} \times \text{ح} \quad \text{أى أن : الأول} \times \text{الرابع} = \text{الثاني} \times \text{الثالث} .$$

وبمعرفة ثلاثة من هذه المقادير الأربعة المتناسبة يمكن استخراج المقدار المجهول باستخدام هذه العلاقة .

ولقد ساق العاملى أمثلة ثلاثة نُبيِّها فيما يلي :

المثال الأول : ماهو العدد الذى إذا أُضيف إليه رُبْعُه أصبح ثلاثة ؟ يُحدد العاملى طريق الحل فيقول :

يؤخذ مخرج الكسر - وهو ٤ - ويُسمى « المأخذ » . ويُتصرَّف فيه بحسب السؤال - أى يُضاف إليه رُبْعُه - فيصبح ٥ ، ويُسميه العاملى « الواسطة » .

فنحصل على معلومات ثلاث هى :

$$\text{المأخذ} = ٤$$

$$\text{الواسطة} = ٥$$

$$\text{المعلوم} = ٣$$

(ما أعطاه السائل)

ويضع العاملى معادلته على الوجه التالى :

$$\frac{\text{المجهول}}{\text{المعلوم}} = \frac{\text{المأخذ}}{\text{الواسطة}}$$

$$= \frac{\text{المجهول}}{٣} = \frac{٤}{٥} \quad \text{نجد أن :}$$

فيكون العدد المطلوب هو : $\frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$
 وتحليل هذا المثال يمكننا أن نطرق الحل على الوجه التالي :

$\frac{1}{4} \times$ العدد المجهول = 3
 أى أن $\frac{5}{4} \times$ المجهول = المعلوم
 وباستخدام تعبيرات العاملى تكون المعادلة كما يلي :

$$\frac{\text{الواسطة}}{\text{المأخذ}} \times \text{المجهول} = \text{المعلوم}$$

$$\text{أى أن المجهول} = \frac{\text{المأخذ} \times \text{المعلوم}}{\text{الواسطة}}$$

المثال الثانى : • أرطال بثلاثة دراهم . رطلان بكم ؟

الأرطال الخمسة : المُسَعَّر

والدراهم الثلاثة تسمى : السَّعْر

والرطلان يُسميان : المُثَمَّن

والمستول عنه هو : الثَّمَن

$$\frac{\text{المُسَعَّر}}{\text{السَّعْر}} = \frac{\text{المُثَمَّن}}{\text{الثَّمَن}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{\text{الثمن}}$$

$$\text{فيكون الثمن} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2} = 7 \frac{1}{2} \text{ درهماً}$$

ومن الواضح أنَّ نسبة السَّعْر إلى المُسَعَّر ماهى إلا قيمة الوحدة ، فهى فى المثال قيمة الرطل بالدراهم .

المثال الثالث : • أرطال بثلاثة دراهم ، كم رطلا بدرهمين ؟ فالمجهول هنا « المُثَمَّن » . فتكون المعادلة على النحو التالى :

$$\frac{\text{المثمن (المجهول)}}{2} = \frac{5}{3}$$

$$\text{فيكون المَثَمَّن} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3} \text{ رطلا .}$$

الباب الرابع

في استخراج المجهولات بحساب الخطأين

تفرض المجهول ما شئت . وتسميه المفروض الأول ، وتتصرف فيه بحسب السؤال . فإن طابق فهو المطلوب ، وإن أخطأ بزيادة أو نقصان فهو الخطأ الأول . ثم تفرض آخر وهو المفروض الثاني ، فإن أخطأ حصل الخطأ الثاني ، ثم اضرب المفروض الأول في الخطأ الثاني ، وتسميه المحفوظ الأول . والمفروض الثاني في الخطأ الأول . وهو المحفوظ الثاني . فإن كان الخطآن زائدين أو ناقصين . فاقسم الفضل بين المحفوظين على الفضل بين الخطأين . وإن اختلفا فمجموع المحفوظين على مجموع الخطأين ليخرج المجهول .

فلو قيل أي عدد زيد عليه ثلثاه ودرهم حصل عشرة . فإن فرضته تسعة فالخطأ الأول ستة زائدة . أو ستة فالخطأ الثاني واحد زائد . فالمحفوظ الأول تسعة . والثاني ستة وثلاثون . والخارج من قسمة الفضل بينهما على الفضل بين الخطأين . خمسة وخمسان وهو المطلوب .

ولو قيل أي عدد زيد عليه رُبُعُه . وعلى الحاصل ثلثة أخماسه ^(١) . ونقص من ^(٢) المجتمع خمسة دراهم . عاد الأول . فلو فرضته أربعة ، أخطأت بواحد ناقص ^(٣) . أو ثمانية فبثلاثة زائدة . وخارج قسمة مجموع المحفوظين [على مجموع الخطأين] ^(٤) خمسة . وهو المطلوب .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : أخماس .

(٢) في المخطوط ٧٥٣ : في .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) اضيفت ليكمل المعنى حسب النص .

شرح : في هذه الطريقة - أعني استخراج المجهولات بحساب الخطأين - يجرى العمل على النحو التالي :

- ١ - نفرض أية قيمة للمجهول ونسميها المفروض الأول .
- ٢ - تعوض هذه القيمة الفرضية في المسألة فإن طابقت كان المفروض الأول هو الإجابة المطلوبة ، وإلا فاحسب الخطأ الناشئ عن المفروض الأول ، ولتسم هذا الخطأ بالخطأ الأول .
- ٣ - تكرر الخطوتان السابقتان لقيمة ثانية للمجهول ، ولنسميها المفروض الثاني ، ولنحسب الخطأ الثاني .
- ٤ - اضرب المفروض الأول في الخطأ ، وسمه المحفوظ الأول .
- ٥ - اضرب المفروض الثاني في الخطأ الأول ، وسمه المحفوظ الثاني .
- ٦ - إن كان الخطآن الأول والثاني متحدى الإشارة (إما الاثنان زائدين ، أو الاثنان ناقصين) ، فاقسم الفرق بين المحفوظين على الفرق بين الخطأين تحصل على قيمة المجهول .
- ٧ - إن كان الخطآن الأول والثاني مختلفي الإشارة ، فاقسم مجموع المحفوظين على مجموع الخطأين تخرج قيمة المجهول .

ولبيان صحة هذه الطريقة ، نفرض أن المسألة يمكن تمثيلها بالمعادلة الآتية :

$$ب س + ح = صفرًا \quad (١)$$

نفرض القيمة العددية ف١ للمجهول س (فتكون ف١ هي المفروض الأول) . وتعوض ف١ في المعادلة (١)

$$ب س + ف١ ح = صفرًا \quad (٢)$$

حيث خ١ الخطأ الأول

نكرر العمل لقيمة عددية فرضية ثانية ف٢

$$ب س + ف٢ ح = صفرًا \quad (٣)$$

ب طرح المعادلة (٣) من المعادلة (٢) نحصل على :

$$(٤) \quad \begin{aligned} & \text{ب} \quad (ف_١ - ف_٢) = خ_١ - خ_٢ \\ & \text{أى أن ب} = \frac{خ_١ - خ_٢}{ف_١ - ف_٢} \end{aligned}$$

وبالتعويض بقيمة ب فى المعادلة (٣) نجد أن :

$$(٥) \quad \frac{ف_١ خ_٢ - ف_٢ خ_١}{ف_١ - ف_٢} = ح$$

وبالتعويض بقيمة ب ، ح (من المعادلتين ٤ ، ٥) فى المعادلة (١) نحصل على قيمة المجهول س :

$$س = \frac{ح}{ب} = \frac{ف_١ خ_٢ - ف_٢ خ_١}{خ_١ - خ_٢}$$

المفروض الأول \times الخطأ الثانى - المفروض الثانى \times الخطأ الأول
 أى أن س = $\frac{\text{المفروض الأول} \times \text{الخطأ الثانى} - \text{المفروض الثانى} \times \text{الخطأ الأول}}{\text{الخطأ الثانى} - \text{الخطأ الأول}}$

وعند اختلاف الخطأين فى الإشارة - تنقلب الإشارتان السالبتان فى الصورة (البسط) والمخرج (المقام) إلى إشارتين موجبتين .

فى المثال الأول الذى ساقه العامل لشرح هذه الطريقة المطلوب إيجاد عدد إذا أضيف إليه ثلثاه ودرهم حصل عشرة .

$$\text{فبالمفروض الأول } ف_١ = ٩ ، \text{ يكون المجموع } ٩ + ٩ \times \frac{٢}{٣} + ١ = ١٦$$

والمطلوب أن يكون عشرة فقط ، فيكون الخطأ الأول $خ_١ = ٦ +$

$$\text{وبالمفروض الثانى } ف_٢ = ٦ ، \text{ يصبح المجموع } ٦ + ٦ \times \frac{٢}{٣} + ١ = ١١$$

فالخطأ الثانى $خ_٢ = ١ +$

$$\therefore \text{المحفوظ الأول} = \text{المفروض الأول} \times \text{الخطأ الثاني} \times \text{خ} \\ 9 = 1 \times 9 =$$

$$\text{والمحفوظ الثاني} = \text{المفروض الثاني} \times \text{الخطأ الأول} \times \text{خ} \\ 36 = 6 \times 6 =$$

$$\text{وبذلك فالعدد المطلوب إيجاده} = \frac{9 - 36}{1 - 6} = \frac{27}{5} = \frac{2}{5} \text{ درهما}$$

أما في المثال الثاني :

$$\text{فبالمفروض الأول} \text{ ف} = 4 \text{ ، يكون الخطأ الأول} \text{ خ} = 1 -$$

$$\text{وبالمفروض الثاني} \text{ ف} = 8 \text{ ، ينتج الخطأ} \text{ خ} = 3 +$$

$$\therefore \text{العدد المطلوب إيجاده} = \frac{1 \times 8 + 3 \times 4}{1 + 3} = \frac{20}{4} = 5 \text{ دراهم}$$

وجدير بالذكر أن طريقة «حساب الخطأين» كانت معروفة منذ بدء الحضارة العربية ، وقد كتبت فيها كتب ورسائل عديدة ، منها مؤلفات قسطا بن لوقا وأبي كامل شجاع بن أسلم الحاسب المصري (القرن التاسع الميلادي) ، وأبي يوسف يعقوب بن محمد الرازي وأبي يوسف يعقوب بن محمد المعيصي (من علماء القرن العاشر للميلاد) ، وأبي الحسن أبي المعالي الدسكري المنجم ، والحسن بن الهيثم (٩٦٦ - ١٠٣٩ م) ، وكمال الدين بن يونس (١١٥٦ - ١٢٤٢ م) ؛ وذلك على سبيل المثال لا الحصر .

الباب الخامس

في استخراج المجهولات بالعمل بالعكس

وقد يُسمَّى بالتَّحْلِيلِ والتَّعَاكُسِ ، وهو العملُ بعكسِ ما أعطاه السَّائِلُ . فإنَّ ضَعْفَ فنصِّفَ ، أَوْزَادَ فانْقُصْ . أَوْضَرْبَ فاقسِمْ . أَوْجَذَّرَ قَرَّبْ . أَوْعَكَّسَ فاعكس ، مُبْتَدِئًا من آخِرِ السُّؤَالِ لِيَخْرُجَ الجَوَابُ .

فلَوْ قِيلَ أَيُّ عَدَدٍ ضُرِبَ في نفسه . وَزِيدَ على الحاصل اثنان ، وَضُعِفَ وَزِيدَ على الحاصل ثلاثة دراهم . وَقُسِمَ المَجْتَمِعُ^(١) على خمسة . وَضُرِبَ الخارجُ في عشرةٍ حصل خمسون . فاقسِمها على العشرة . واضرب الخمسة في مثلها وانقص من الحاصل ثلاثة . ومن مَنَصَّفِ الاثنين والعشرين اثنان . وَجَذَّرُ التَّسْعَةِ جوابٌ .

ولو قِيلَ أَيُّ عَدَدٍ زِيدَ عليه نِصْفُهُ وأربعة دراهم . وعلى الحاصل كذلك بَلَغَ عشرين . فانقص الأربعة ثُمَّ ثَلَاثُ السَّتَّةِ عشر . لِأَنَّهُ النِّصْفُ^(٢) المَزِيدُ . يَبْقَى عشرةٌ وثلثان . ثُمَّ انقص منه أربعة . ومن الباقي ثلثه يَبْقَى أربعة . وأربعة أَتَسَاعٍ . وهو الجواب .

(١) « المجموع » في المخطوط ٧٥٣ .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : بالنصف .

شرح : في هذه الطريقة يبدأ الحل من نهاية المسألة . وتجرى الخطوات بعكس ما يرد في منطوق المسألة حتى نصل بالتسلسل إلى قيمة المجهول .

= المثال الأول :

في هذا المثال تنتهى المسألة بالعدد ٥٠ فهو نقطة البداية ، وحيث إنه نتج من ضرب عددٍ قبله في ١٠ . فيكون العدد السابق على ال ٥٠ هو $\frac{٥٠}{١٠}$ ، وحيث إن هذا نتج من قسمةٍ سابقةٍ على العدد ٥ ، فالأصل إذن $\frac{٥٠}{١٠} \times ٥$ ، ولما كان قد زيد عليه ٣ . فأصله $٢٥ - ٣ = ٢٢$ ، وحيث إنه ضِعْف العدد السابق عليه ، فنشؤه $\frac{٢٢}{٢} = ١١$ ، وهذا مُزاد عليه ٢ ، فأصله ٩ . وهو حاصل ضرب العدد الأصلي في نفسه ، فالجهول إذن جَذْر ٩ ، أى ٣ وهو العدد المطلوب .

المثال الثاني :

لما كان العدد ٢٠ درهماً هو العدد الذى تؤول إليه المسألة في النهاية . ولما كان قد زيد عليه ٤ دراهم ، فلنبداً بطرحها ليصير ١٦ درهماً ، وهذا في حد ذاته مُزادٌ عليه نصفه ، فيكون أصله $\frac{٢}{٣} \times ١٦ = ١٠\frac{٢}{٣}$ ، ثم يُنقص منه ٤ ليصبح $\frac{٢}{٣} \times ٦$. وهذا قد سبق وأن زيد عليه نصفه - كما هو وارد في منطوق المسألة - فيكون أصله $\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times ٦$. أى $\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٩} = \frac{٤٠}{٩}$ ، فهو إذن العدد الأصلي المطلوب .

الباب السادس

في المساحة

وفيه مقدمة وثلاثة فصول .

مقدمة

المساحةُ استعلامٌ ما في الكمِّ المتَّصلِ القارُّ من أمثالِ الواحدِ الخطِّي أو أُبعاضِهِ .
مثلَ شِبْرٍ ونِصْفٍ شِبْرٍ أو كليهما إن كان خطًّا ، أو أمثالِ مُربَّعه كذلك إن كان سَطْحًا ،
أو أمثالِ مُكعَّبه كذلك إن كان جِسْمًا .

فَالخَطُّ ذو الامتدادِ الواحدِ . فمنه مستقيمٌ وهو أقصرُ الخطوط ^(١) الواصلةِ بين
نقطتين . وهو المرادُ إذا أُطْلِقَ . (فَالخَطُّ ذو الامتدادِ) ^(٢) وأسماؤه العشرةُ
مشهورةٌ . ولا يحيط مع مثله بسطحٍ . وغيرُ المستقيمِ منه بركارِيٌّ وهو معروفٌ . وغير
بركارِيٍّ . ولا بحث لنا عنه .

وَالسَّطْحُ ذو الامتدادَيْنِ فقط ومستويه هو ^(٣) ما يقع الخطوط المخرجة عليه . في
أى جهةٍ عليه . فإن أحاط به واحدٌ بركارِيٍّ فدائرةٌ . والخَطُّ المنصِّفُ لها قطرٌ .
وغيرُ المنصِّفِ وَتَرٌّ لكلٍّ من القوسين . وقاعدةٌ لكلٍّ من القطعتين . أو قوسٌ من
دائرةٍ ونصفا قطرها ملتقيين عند مركزها فقطاعٌ . وهو أكبر أو أصغر . أو قَوْسان
تحديتهما إلى جهةٍ غير أعظم من نصبي دائرتين فهلالِيٌّ . أو أعظمَ فنَعْلِيٌّ . أو مختلِيٌّ

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) ناقصة في المخطوطين ٧٥٣ . ١٧٧٣ .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

التَّحْدِيدِ متساويان ، كلُّ أصغر من التَّصْفِ فاهليلجى ، أو أعظم فشلجمى ،
أو ثلاثة مستقيمة ، فثلث متساوى الأضلاع أو السَّاقين ، أو مختلفها ، قايم الراوية
ومنفرجها ، وحاك الزوايا ، أو أربعة متساوية ، فربَّعٌ إن قامت ، وإلا فمعين .
وغير المتساوية مع تساوى المتقابلين مستطيلٌ إن قامت ، وإلا فشيء المعين .
وما عداها منحرفات ، وقد يُخصَّصُ بعضها باسم كذى الرُّنْقَةِ والرَّنْقَتين ، وقَتَاءٌ^(١) ،
أو أكثر من أربعة فكثيرُ الأضلاع ، فإن تساوت قيل مُخَمَّسٌ ومُسَدَّسٌ وهكذا ،
وإلا فذو خمسة أضلاع ، وذو ستة أضلاع وهكذا إلى العشرة فيها ، ثم ذو إحدى
عشرة قاعدةً واثنى عشرة وهكذا فيها^(٢) .

وقد يخصُّ البعض باسم^(٢) كالمدرج والمطبَّل^(٣) ، وذى الشُّرف بضمِّ الشين .
والجسمُ ذو الامتدادات الثلاثة ، فإن أحاطه سطحٌ يتساوى جميع^(٤)
[الخطوط]^(٥) الخارجة من داخله إليه فكرةً ، ومنصَّفها من الدوائر عظيمة ،
وإلا فصغيرة ، أو ستة مربَّعات متساوية فكعب ، أو دائرتان متساويتان متوازيتان ،
وسطح واصل بينهما بحيث لو أُديرَ مُستقيمٌ واصلٌ بين محيطيهما عليه ، ماسَّةٌ بكلِّه في
كلِّ الدَّوَرَةِ فأسطوانة ، وهما قاعدتاها ، والواصلُ بين مركزيهما سهمها ، فإن كانَ
عمودًا على القاعدةِ فالأسطوانة قائمةً ، وإلا فائلةٌ أو دائرة وسطح صَنْوَبْرِى مرتفع
من محيطها متضابقًا إلى نقطةٍ بحيث لو أُديرَ مستقيمٌ واصلٌ بينهما ، ماسَّةٌ لِكُلِّه في كلِّ
الدَّوَرَةِ فمخروطٌ قايمٌ أو مائلٌ ، وهى قاعدته والواصلُ بين مركزها والنقطة سهمه ،
وإن قُطِعَ بمستوى يوازيها فما يليها منه مخروطٌ ناقصٌ ، وقاعدةُ المخروطِ والأسطوانة إن
كانت مُضَلَّعةً فكلٌّ منهما مضلَّعٌ مثلها ، فهذه أكثر الاصطلاحات المتداولة في هذا
الفن .

(٤) ناقصة في المخطوطين ٧٥٣ و ١٢٥٣ .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : قَتَاء .

(٥) غير موجودة في المخطوطات الثلاثة .

(٢) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

شرح : يتناول العاملى فى الباب السادس من كتابه تعريف كُلِّ من الحَظِّ والسطح والجسم ، ويبين أنواعها المختلفة ، وكيفية تكوين الأشكال والأجسام الهندسية .

الأشكال المستوية :

تعرِّض العاملى - فى مجال الأشكال الهندسية المستوية - للشكل الدائرى ومُتعلِّقات الدائرة من القطر والمركز والوتر والقوس والقطاع ، كذلك عرض العاملى للأشكال المكوَّنة من الأقواس كالأشكال الهلاليَّة والنَّعلِيَّة والإهليلجية والشَّلْجَمِيَّة ، ويبين المخطوط ١٧٧٣ صور هذه الأشكال بوضوح (شكلاً ٧ ، ٨) .

عرج العاملى كذلك على الأشكال ذات الأضلاع المستقيمة ، فبدأ بالأشكال ثلاثية الأضلاع كالمثلثات بأنواعها ، وثنى بالأشكال رباعية الأضلاع كالمربع والمستطيل والمُعَيَّن وشبيهه المُعَيَّن ، وما عدا ذلك مما أسماه بالمنحرفات ، وقد خصَّ بعضَ هذه المنحرفات بأسماء كذى الرِّنْقَةِ وذى الرِّنْقَتَيْن والقثاء ، وانتهى العاملى إلى الأشكال ذات الأضلاع الكثيرة (أى أكثر من أربعة أضلاع) كذى خمسة الأضلاع (فإن تساوت سُمِّيَ مُخَمَّساً) وهكذا ، وقد خُلِعت على بعض هذه الأشكال المتعدِّدة الأضلاع أسماء خاصة منها المدرِّج والمطلب وذو الشُّرف ، وكلُّها مُبيَّنة صورها فى المخطوط (شكلاً ٨ ، ٩) .

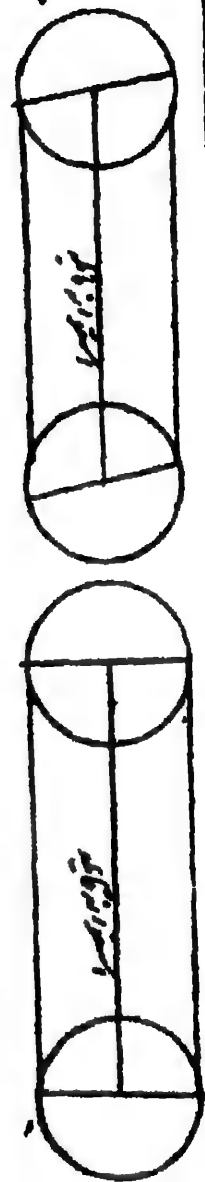
الأجسام الهندسية

عرَّفَ العاملى الجسمَ بأنَّه ذو الامتدادات الثلاثة ، فعرَّفَ بالكرة والمكعَّب والأسطوانة القائمة والمائلة ، والمخروط القائم والمائل ، وأتى بأوصافها ذاكراً خواصَّها من حيث الأبعاد وأشكال السطوح وعلاقة قاعدة الجسم بسهمه (أى بمحوره) وما إلى ذلك من صفات وخواص هندسية .

فقد استوفى سند راد كونه استوفى سند احد وجبات تسليم سواها والاخر
بعضها لا استطاعه خلاف وجبات كانت في حديق فينا بعضه من كذا فينا بعضه

مستخرج

ذوالشرف



اصناع و دوسته اضلاع و هكذا الى العشرة فيها ثم اربع عشرة
قاعدة و اثني عشر و هكذا فيها و قد تحضر البعض باسم كل مستخرج
و قد بالشرف بعض النين و جسم ذو الامتداد الثلاثة
فان احاطه سطح بيدي جميع الخارجة من داخل اليه فكل
و نصف في الدوائر عظمية و الاقصية او ستة مرتبة متساوية
فكل عيب و ايرتان متساويان متوازيان و سطح و اصل
بينها بحيث لو ادير مستقيم و اصل من محيطها عليه ماسة بكونه كل
الدورة فاسطوانة و هما قاعدتاها و الواصل بين دكزيها
سهما فان كانا عمودا على القاعدة فاسطوانة قائمة و الا
فما لا و دائرة و سطح منو بدي مرتفع من محيطها متصفا
الي نقطة بحيث لو ادير مستقيم و اصل بينهما ماسة بكونه في كل
الدورة فخرط قائم و ايل و هي قاعدته و الواصل بين مركزا
و النقطه سهم و ان قطع بمستويين يوزيها فباقيها منه فخرط
ناقص فقاعدته الخروط و الاسطوانة ان كانت مقلقة فكل
انها مصلع مشبه فلهذا اكثر الاسطوانة المدة و له في هذا الفن

الفصل الأول : فى مساحة السطوح المستقيمة الأضلاع

أمّا المثلثُ فقائمُ الزاوية منه يُضربُ أحدُ المحيطين بها فى نصفِ الآخر ، ومنفرجُها بضربِ العمودِ المُخرج منها على وترها فى نصفِ الوتر أو بالعكس ، وحادُّ الزوايا بضربِ ^(١) مخرج من أيّها عمودًا ^(٢) على وترها كذلك . ويعرف أنه أىّ الثلاثة بتربيع أطول أضلاعه ، فإنّ ساوى الحاصل مُربّعى الباقيين فهو قائمُ الزاوية . أو زاد فنفرجها ، أو نقص فالحادّ ، وقد يستخرج العمود يجعل الأطول قاعدةً ، وضربِ مجموع الأقصرين فى تفاضلها ، وقسمة الحاصل عليها . ونقص الخارج منها . فنصف الباقي هو بُعْدُ موقعِ العمود عن طرفِ أقصرِ الأضلاع . فأقيمُ منه خطًّا إلى الزاوية فهو العمودُ ، فاضربه فى نصفِ القاعدة يحصل المساحةُ .

ومن طُرُقِ مساحةٍ متساوى الأضلاع ضَرْبُ مربعٍ ربعٍ مربعٍ أحدها فى ثلاثة أبدًا . فجزرُ الحاصلِ جواب .

وأمّا المربعُ فاضربِ أحدَ أضلاعه فى نفسه .

والمستطيلُ فى مجاوره .

والمعين نصفَ أحدِ قُطْرَيْهِ فى كلِّ الآخر .

(١) فى المخطوط ٧٥٣ : تضربه .

(٢) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

شرح : خصّص العاملى هذا الفصل لبيان كيفية إيجاد مساحة الأشكال المستوية ذات الأضلاع المستقيمة كالمثلث بأنواعه والمربع والمستطيل والمُعَيّن والأشكال الرباعية الأخرى والأشكال كثيرة الأضلاع ، وفى هذه الأخيرة يُلجأ - عمومًا - إلى تقسيم الشكل إلى مثلثات تُعيّن مساحاتها المنفردة ثم تُجمع لتعطى مساحة الشكل المطلوب .

وباقى ذوات الأربعة ، تقسم مثلثين ، فمجموع المساحتين مساحة المجموع .
ولبعضها طرق خاصة لا تسعها الرسالة .

وأما كثير الأضلاع فالمستدس والمثلث فصاعداً من زوج الأضلاع تضرب نصف قطره^(١) فى نصف مجموعها ، فالحاصل جواب ، وقطره الواصل بين منتصفى متقابليه ، وما عداها يُقسّم بمثلثات ويُمسح ، وهو يعم الكل ، ولبعضها طرق كذوات الأربعة .

الفصل الثانى

فى مساحة بقيّة السطوح

أما الدائرة فطبّق خيطاً على محيطها ، واضرب نصف قطرها فى نصفه ، أو اتق من مربع قطرها سبعة (ونصف سبعة)^(٢) ، أو اضرب مربع القطر فى أحد عشر ، واقسم الحاصل على أربعة عشر ، وإن ضربت القطر فى ثلاثة وسبع حصل المحيط ، أو قسمت المحيط عليه خرج القطر .

وأما قطاعها فاضرب نصف القطر فى نصف القوس .

وأما قطعناها فحصل مركزيهما وكمثلها قطاعين ليحصل مثلث فانقصه من القطاع الأصغر ليبقى مساحة الصغرى ، أوزده على الأعظم ليحصل مساحة الكبرى .

وأما الهلال والنعل فصول طرفيهما ، وانقص مساحة القطعة الصغرى من الكبرى .

وأما الاهليلجى والشلجى فاقسمها قطعتين .

وأما سطح الكرة فاضرب قطرها فى محيط عظيمتها ، أو مربع قطرها فى أربعة ،

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : قطرها .

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

وانقص من الحاصل شُبْعَةً ونصّف شُبْعَهُ ، ومساحةُ سطح^(١) قطعتيها تُساوى مساحةَ دائرةٍ نصف قطرها يُساوى خطّاً واصلاً بين قُطْبِ القطعة ومُحيطِ قاعدتها .

وأما سطحُ الأسطوانةِ المستديرةِ القائمةِ ، فاضربِ الواصلَ بين قاعدتيها الموازى لِسَهْمِها في محيط القاعدة .

وأما سطحُ المخروطِ المستديرِ القائمِ ، فاضربِ الواصلَ بين رأسه ومُحيطِ قاعدته في نصفِ مُحيطها .

وما لم يُذكر من السُّطوحِ يُستعان عليه بما ذُكِرَ .

(١) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

شرح : يختص الفصل الثاني بإيجاد مساحة الدائرة وقطّاعها وقطعتيها . كذا مساحة الأشكال الهلالية والنعلية والإهليلجية والشلجمية . ويعرج العاملى بعد ذلك إلى تعيين مساحة أسطح الأجسام الهندسية . فيعرض لسطح الكرة . وسطح الأسطوانة المستديرة القائمة . وسطح المخروط المستدير القائم .

الفصل الثالث

في مساحة* الأجسام

أما الكرة فاضرب نصف قطرها في ثلث سطحها ، أو ألقى من مكعب القطر سبعة ونصف سبعة ، ثم من ^(١) الباقي كذلك ، وأما قطعها ^(٢) فاضرب ^(٣) نصف قطر الكرة في ثلث سطح القطعة .

وأما الأسطوانة مطلقاً ، فاضرب ارتفاعها في مساحة قاعدتها .

وأما المخروط التام مطلقاً ، فاضرب ارتفاعه في ثلث مساحة قاعدته ، وأما المخروط الناقص المستدير ، فاضرب قطر قاعدته العظمى في ارتفاعه ، واقسم الحاصل على التفاوت بين قطري القاعدتين يحصل ارتفاعه لو ^(٤) كان تاماً ،

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : و .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : قطعناها .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) في المخطوط ١٢٥٣ : إن .

• يعني بها الحجم وليس مساحة السطح . ويبدو أن المُصنّف يستعمل كلمة المساحة في معنى القياس .

شرح : يقصد العامل في هذا الباب إلى تعيين أحجام الأجسام الهندسية المنتظمة ، فيعين أحجام الأجسام المألوفة كالكرة والأسطوانة . والمخروط التام ، والمخروط الناقص المستدير ، كذا حجم المضلع .

وفي الواقع فإن ما ذكره العامل في الباب السادس لم يأت فيه بجديد حيث إن المعلومات التي أوردها فيه كانت معروفة تماماً من قبل لاسيما وأن الإغريق قد سبق وأن أفرغوا جانباً كبيراً من جهدهم الفكري في مجال الهندسة من أشكال مستوية وأجسام منتظمة . ولعلّ مؤلفات إقليدس تقف خير شاهد على سبق الإغريق في هذا المضمار .

والنفاضل بين ارتفاعى الثام والثاقص ارتفاع المخروط الأصغر المئتم له ، فاضرب
ثلاثة فى مساحة القاعدة الصغرى يحصل مساحته ، فاستقطها من مساحة الثام .

وأما المضلع فاضرب ضلعًا من قاعدته العظمى فى ارتفاعه ، واقسم الحاصل على
النفاضل بين أحد أضلاعه^(١) وآخر من الصغرى ليحصل مساحة الثام ، وكمل
العمل .

وبراهين هذه الأعمال مفصلة^(٢) فى كتابنا الكبير المسمى « ببحر الحساب » وفقنا
الله تعالى لإتمامه .

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : أضلاعها .

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

الباب السابع

فما يتبع المساحات من وزن الأرض لإجراء
القنوات ، ومعرفة ارتفاع المرتفعات ، وعروض
الأنهار ، وأعماق الآبار

وفيه ثلاثة فصول .

الفصل الأول : في وزن الأرض لإجراء القنوات

اعمل صفحةً مثلثة^(١) من نحاسٍ ونحوه متساوية الساقين ، وبين طرفي قاعدتها
عُرْوَتَانِ ، وفي موضعِ العمود منها خيطٌ رقيقٌ مُثْقَلٌ ، واسلكها في منتصف خيط ،
وضَعْ طرفيه على خشبتين مقومتين متساويتين مُعْتَدِلَتَيْنِ بِالثَّقَالَتَيْنِ ، والجلاجل بيدي
رَجُلَيْنِ بينهما بقدر^(٢) الخيط ، وقد جرت العادة بكونِ الخيطِ خمسة عشر ذراعًا
بذراع اليد ، وكلٌّ من الخشبتين خمسة أشبار ، وانظر إلى^(٣) الشاقول ، فإن انطبق
خيطه على زاوية الصفيحة^(٤) فالموقفان متساويان ، وإلا فَنُزِّلِ الخيطَ عن رأسِ
الخشبِ إلى أن يحصل الانطباقُ ، ومقدارُ التَّزْوِيلِ (و)^(٥) هو الزيادة ، ثم انقل أحد
الرَّجُلَيْنِ إلى الجهة التي تريد وزنها ، وتحفظ كلاً^(٦) من الصُّعود والتَّزْوِيلِ على حدة ،
وتلقى القليلَ من الكثير ، فالباقي تفاوت المكانتين ، فإن تساويا شقَّ إجراء الماء ،

(١) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(٢) في المخطوط ٧٥٣ : مقدار .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) في المخطوط ١٧٧٣ : الصفحة .

(٥) زائدة في المخطوط ٧٥٣ .

(٦) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

وإلا سهل أو امتنع . وإن شئت فاعمل انبوبةً ، واسلكها في الخيط ، واستغن بالماء واستغن عن الشاقول والصفحة^(١) .

طريق آخر

قف على البئر الأول . وضع عَصَاة الاسطرباب على خطّ المشرق والمغرب . وتأخذُ آخر قصبةٍ يساوى طولها عمقه . ويذهب في الجهة التي تريد سوق الماء إليها ناصبًا لها . (فانظر إليها)^(٢) إلى أن ترى رأسها من الثقبين . فهناك يجري الماء على وجه الأرض . وإن بعدت المسافة بحيث لا ترى رأسها . فاشعل^(٣) فيها سراجًا . واعمل ذلك ليلاً .

(١) في المخطوط ١٧٧٣ : الصفحة .

(٢) ناقصة في المخطوطين ٧٥٣ - ١٧٧٣ .

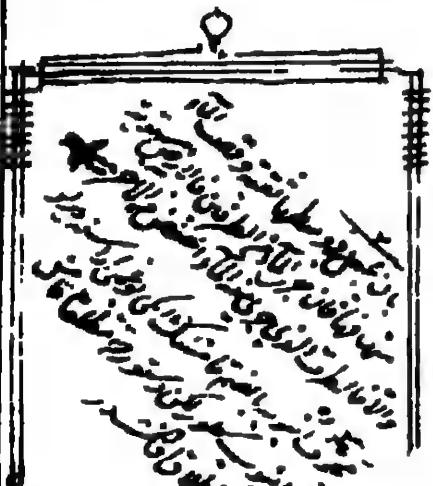
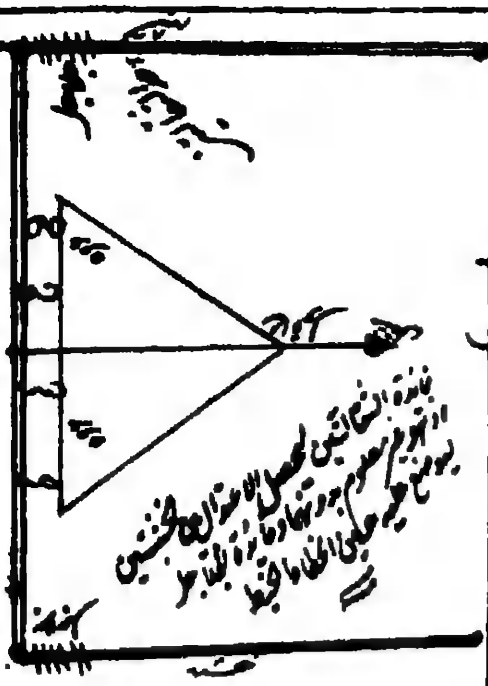
(٣) في المخطوط ١٢٥٣ : فاشتعل .

شرح : يعرض العامل في هذا الفصل طرقًا مختلفة لإيجاد فرق المنسوب (أى فرق الارتفاع) بين موضعين على الأرض . وقد عبّر العامل عن هذه العملية « بوزن الأرض » . وتعتبر عملية أساسية لمعرفة مدى الانحدار في الأرض حتى يمكن شقّ القنوات لينساب الماء من الموضع العالى إلى الموضع المنخفض من الأرض . إذ أنه لو كان الموضعان المختبران عند مستوى واحد لامتنع شق القنوات .

في الطريق الأول - ويوضحه الرسم المبين بالمخطوط ١٧٧٣ (شكل ١٠) - يُستعان بصفحة مثلية متساوية الساقين مُعلّقة بحيث يكون رأس المثلث إلى أسفل وقاعدته موازية للخيط الواصل بين قائمين خشبيين متساويين . وبين وضع الصفحة المثلية خيط الشاقول المثبت عند منتصف الخيط المستعرض الواصل بين القائمين ، ومن المعروف أن خيط الشاقول (خيط رفيع يحمل ثقلًا عند طرفه السفلى ويتجه - بالجاذبية الأرضية - نحو سطح الأرض) يتخذ دومًا وضعًا رأسيًا . فعند انطباق خط التماثل في الصفحة على خيط الشاقول يكون موقعًا للقائمين الجانبيين في مستوى أفقي واحد . أما في حالة عدم الانطباق فإنه يجري إنزال الخيط المستعرض الواصل بين القائمين حتى يتم =

= انطباق خط تماثل الصفيحة (الخط المُسقط من رأس المثلث المتساوي الساقين على قاعدته) على خيط الشاقول ، وفي هذه الحالة يكون مقدار إزاحة الخيط المستعرض عن موضعه الأصلي عند أحد القائمين مُساويًا لفرق المنسوب بين موضعي القائمين .

يذكر العاملى كذلك طريقين آخرين « لوزن الأرض » تستخدم فى أحدهما أنبوبة تُسَلَّكُ فى الخيط مع الاستعانة بالماء على حد تعبيره ، ولعلّ العاملى يشير هنا إلى ما نعرفه اليوم بميزان الماء ، أما الطريق الثالث الذى أشار إليه العاملى فإنه يُستعان فيه بجهاز الرّصد المعروف بالاسطرلاب .



يضعه ان وقع الكاود وسط الخطين فالجانب
والا فبها ما خادست ومقدار الشاؤن المستخرج
طريق آخر ما نسخ بخاطر الجاؤرس عن البير
واذا كان محبة ان لها شؤنا على اسها وضع
الاسطلاب على خط المغرب والمشرق واذا
الاجمعة في ترويض نظرية النقيضين الى الجاؤر
بجربة فاعلم موقعا ان الجاؤر اذهب كذا
فوقه الان هو المطلوب

بين من متوالتين متساويتين معده لتبين بالتعاليق
وجعل يدي جدين بينهما بعد الخط وقدرت العادة يكون
خط خمسة عشرة درعا بدع اليد وكل الخطين خمسة
اسبود وانظر الى شاول فان انطبق خط على زاوية الصغرى
فالمرقنا متساويان ولا تقدر الخط عن رأس الخشب الى ان يحصل
الانطباق ومقدار النزول هو الزيادة ثم انقل احد الرجلين
الى الجهة التي تريد وزنها وتحفظ في الصعود والنزول على جهة
دعنى القبل في الكسبة فالباقي تفاوت الكاهن فان تساويا
شق اجزاء الماء الاسهل واضع وان شئت فاعمل ابوبة واسكنها
في خط واستغن بالماء واستغن عن الشاؤن الصغرى طريق آخر
فان على البير الاول وضع عصابة الاسطلاب على خط المشرق
والمغرب واما آخر فصبه ساوي طولها معده وذهب في الجهة
التي تريد سوق الماء اليها فاصبها الى ان ترى رأسها النقيضين
فما كبري الماء على وجه الارض وان بعدت المسافة بحيث
لا ترى رأسها فاشعل فيه مراحا وعل ذلك ليلا الفصل الثاني

خطوط
الارتفاع
والعرض
والقطر

الفصل الثاني : في معرفة ارتفاع المرتفعات

إنَّ أمكن الوصولُ إلى مسقط حجرها ، وكانت ^(١) في أرضٍ مستوية . فانصب شاخصًا . وقفْ بحيث يَمُرُّ شُعاعُ بَصْرِكَ على رأسه إلى رأسِ المرتفع . ثم امسح من موقفك إلى أصله ، واضربِ المجتمعَ في فضلِ الشَّاخِصِ على قامتك . واقسمِ الحاصلَ على ما بين موقفك وأصلِ الشَّاخِصِ ، وزِدْ قامتكَ على الخارجِ ، فهو المطلوب .

طريق آخر

ضَعْ على الأرضِ مرءاةً بحيث ترى رأسَ المرتفع فيها . واضرب ما بينها وبين أصله في قامتك ، واقسيمِ الحاصلَ على ما بينها وبين موقفك ، فالخارجُ هو الارتفاعُ .

طريق آخر

انصب شاخصًا . واستعلم نسبةَ ظلِّه إليه . فهي بعينها نسبةُ ظلِّ المرتفع إليه .

طريق آخر

استعلم قدر الظلِّ وارتفاع الشمسِ مه ^(٢) . فهو قدر المرتفع .

طريق آخر

ضَعْ شَطِيطَةَ الأسطرلاب ^(٣) على مه ^(٤) ، وقفْ بحيث ترى رأسَ المرتفع من

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : كان .

(٢) كذا في الأصل ، وفي هامش المخطوط ١٢٥٣ كُتِبَ أمامه «خمسة وأربعون» . ولعل هذا الاختصار يُعْبَرُ عن «متصف قائمة» مستعينًا بالحرفين الأول والأخير .

(٣) في المخطوط ١٢٥٣ : الارتفاع .

(٤) نود الإشارة هنا إلى أن العرب قد استعملوا في كتاباتهم بعض اختصارات للكلمات التي يتكرر ورودها ، فمن أمثال هذه الكلمات المختصرة : المص للمصنّف . وظ لكلمة ظاهر . ومم لكلمة ممكن . وح للمُصَحِّح . ومج لكلمة محال . ويق لكلمة يُقال . والمط للمطلوب ، وغيرها كثير .

الثقبتين ، ثم امسح من موقفك إلى أضله ، وزد قامتك على الحاصل ، فالمجتمع هو المطلوب .

وبراهين هذه الأعمال مُبَيَّنَةٌ في كتابنا الكبير .

ولى على الطريق الآخر^(١) برهانٌ لطيفٌ لم يسبقنى أحدٌ إليه ، أوردته في تعليقاتي على فارسيّة الاسطرلاب :

وأما مالا يمكن الوصول إلى مسقط رأسه (كالجبال ، فابصر^(٢) رأسه)^(٣) من الثقبتين ، ولاحظ الشّطية التحتانيّة على أى خط^(٤) من خطوط الظلّ وقَعْتَ ، واعلم موقفك وأدزها إلى أن يزيد أو ينقص قدم أو اصبع ، ثم تقدّم أو تأخّر إلى أن تُبَصِّر^(٥) رأسه مرّةً أخرى ، ثم امسح ما بين موقفيك^(٦) ، واضربه في سبعة ، أو اثني عشر ، بحسب الظلّ ، فالحاصل مع قدر قامتك ، وهو المطلوب .

(١) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

(٢) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

(٣) في المخطوط ١٢٥٣ : تنظر .

(٤) في المخطوط ١٧٧٣ : فانظر .

(٥) في المخطوط ١٧٧٣ : موقفك .

(٦) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

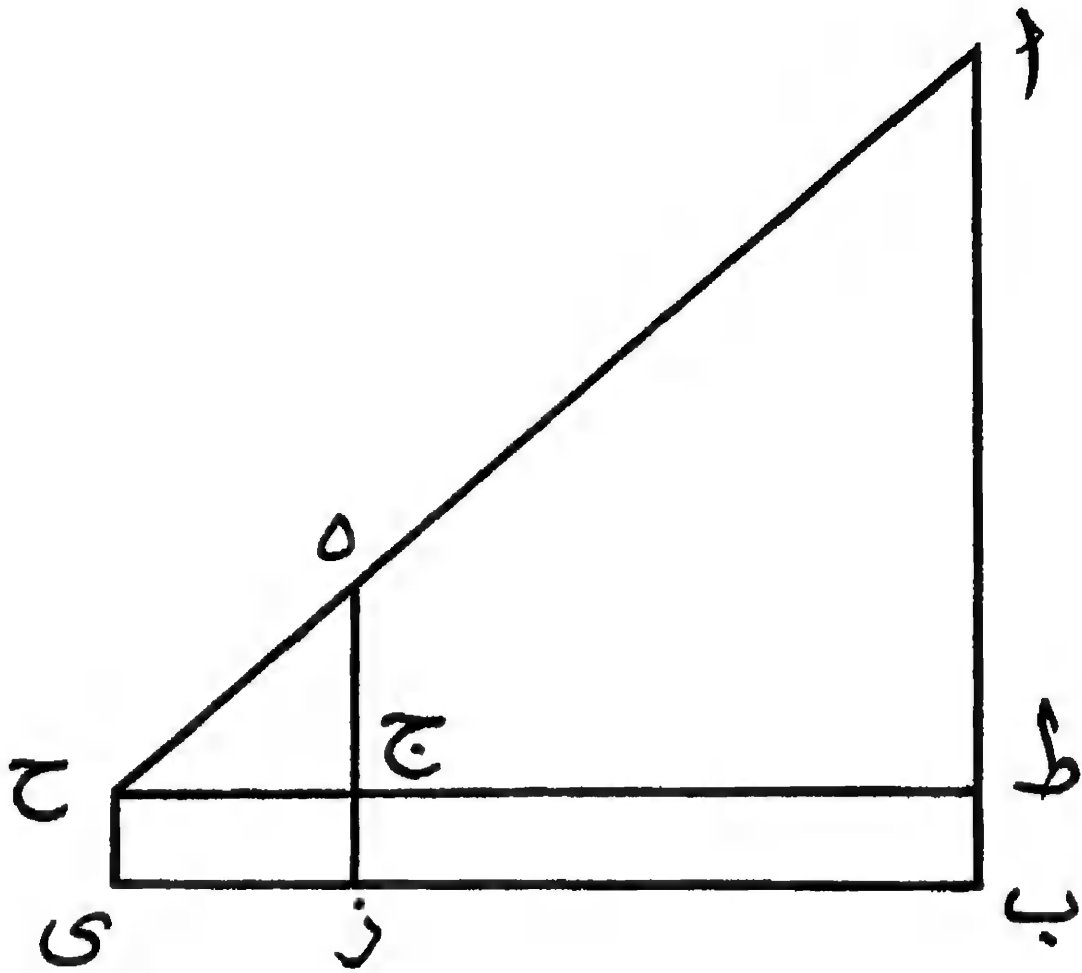
شرح : يتناول العامل في هذا الفصل تحديد الطرق التي يمكن بها تحديد ارتفاع مرتفع ما .

في الطريق الأول يُستعان بشاخص ويتم الرصد بحيث يمر شعاع بصر الراصد برأس الشاخص ورأس المرتفع في آن واحد ، ثم يتم تحديد المسافات بين المرتفع والشاخص وموقف الراصد على ما هو وارد بمثل المخطوط .

هذا وقد وجدنا في هامش المخطوط ١٢٥٣ برهاناً لهذا الطريق في تعيين ارتفاع المرتفع نوره بلفظه فيما يلي :

«برهانه على ما أوردناه في كتابنا الكبير (يقصد كتاب العامل) : «بحر الحساب» الذي يبدوا أنه لم يُكتب له أن يتم) :

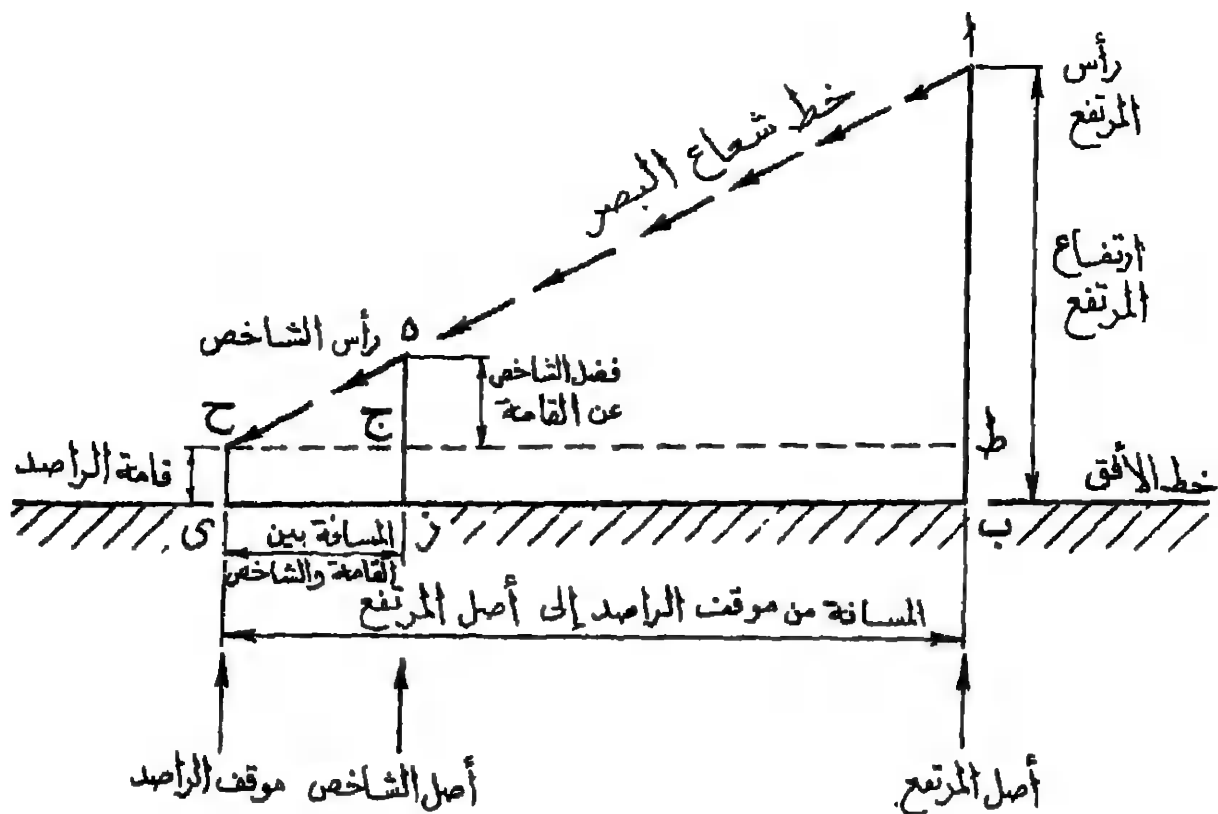
نفرض المرتفع اب ، والشاخص هـ ز . والقامة حى ، والثلاثة أعمدة على خطى زب وهو الأفق ، وح هـ الخط الشعاعى ، ولنخرج من خط حى ح ج ط =



شكل (١١)

تعيين ارتفاع مرتفع بالاستعانة بشاخص (برهان العامل)

= موازيًا للأفق ، وكل من سطحي ح ج ، ز ب (في المخطوط : ح ز ج ب ، وهو تحريف من الناسخ) يتساوى متقابلان يشكل لد* من أولى الأصول ، وفي مثلثي ح ج هـ ، ح ط ا زاوية ح مشرك ، وزاويتا ج ، ط قائمتان يشكل كط* من الأولى ، وزاويتا ح هـ ج ، ح ا ط متساويتان أيضًا فيشكل ي* من السادس . يكون نسبة ح ج [إلى ح ط] - وهو ما بين موقفيك [والشاخص] وأصل المرتفع - كنسبة ج هـ - وهو فضل الشاخص على قامتك - إلى ا ط وهو المجهول . فإذا ضربت أحد الوسطين في الآخر وقسمت الحاصل على الطرف المعلوم ، خرج ا ط المجهول ، فأضف إليه قامتك المساوية لب ط يحصل المط (يقصد المطلوب) . « (كذا في هامش المخطوط) . ويمكن تتبع هذا البرهان بالرجوع إلى شكل (١١) . ونشرح هذا الطريق بالرسم المبين تاليه مستخدمين نفس الرموز التي استخدمها العامل في برهانه (شكل ١٢) . =



شكل (١٢)

تعيين ارتفاع مرتفع برصد رأسى المرتفع وشخص

$$= \text{ويتضح من تشابه المثلثين } \triangle ABC \text{ و } \triangle PQC \text{ أن } \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QC}$$

$$\text{أى أن : } \frac{\text{ارتفاع المرتفع} - \text{طول قامة الراصد}}{\text{الفرق بين ارتفاع الشخص وقامة الراصد}} =$$

$$= \frac{\text{المسافة من موقف الراصد إلى أصل المرتفع}}{\text{المسافة من موقف الراصد إلى أصل الشخص}}$$

فيكون ارتفاع المرتفع =

$$\frac{\text{المسافة من موقف الراصد إلى أصل المرتفع} \times \text{الفرق بين ارتفاع الشخص وقامة الراصد}}{\text{المسافة من موقف الراصد إلى أصل الشخص}}$$

+ طول قامة الراصد

وفى الطريق الثانى يلجأ الراصد إلى مرآة يضعها على الأرض ، ويبعد عنها فى الطرف المعاكس للمرتفع حتى يرى رأس المرتفع ، ويبين شكل (١٣) الفكرة التى تقوم عليها هذه الطريقة مع برهانها الهندسى .

ولما كان خط السقوط وخط الانعكاس عن المرآة يصنعان زاويتين متساويتين مع خط الأفق ، فإن المثلثين اب ج ، هـ د ح مثلثان متشابهان ، ومنه نحصل على

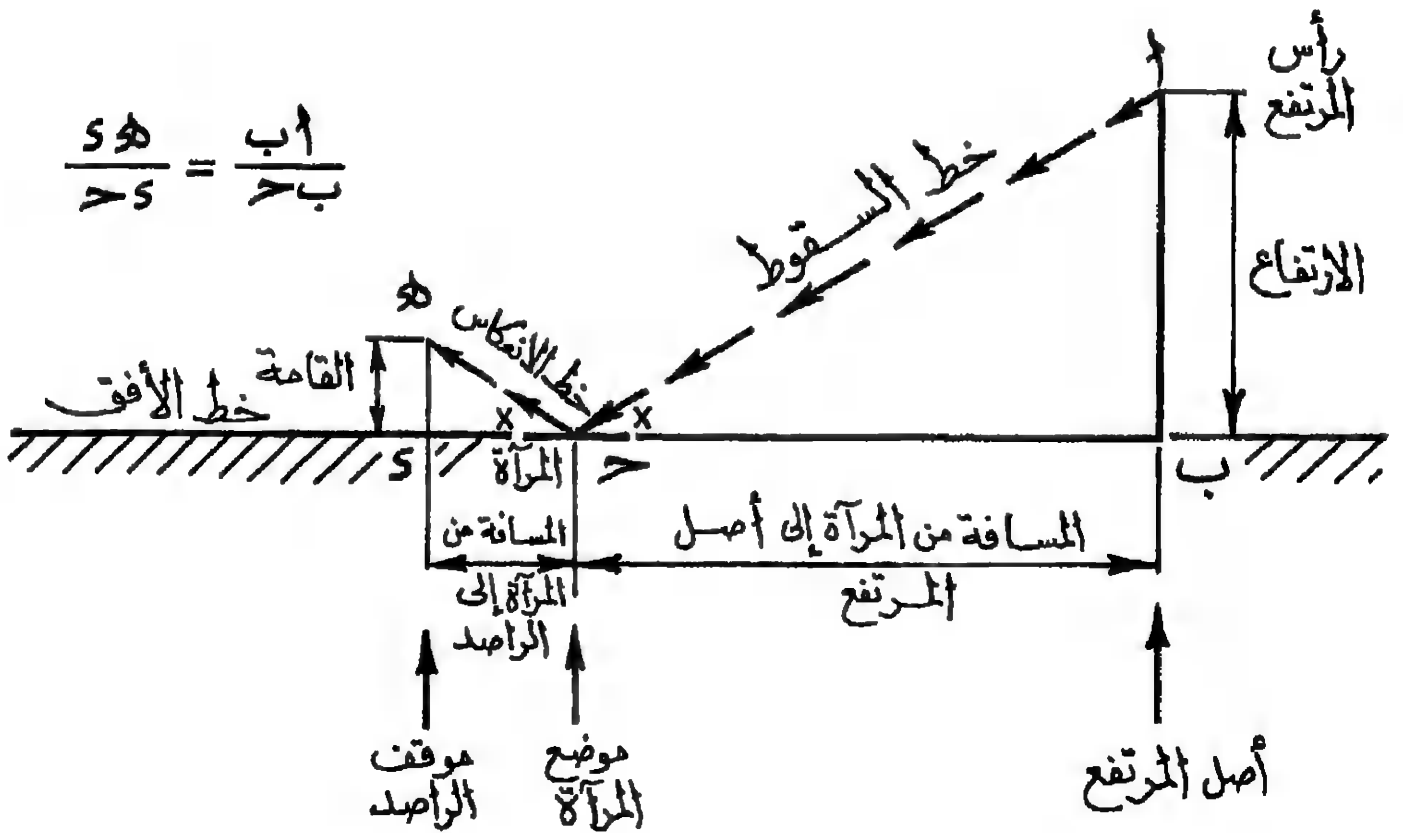
$$\text{العلاقة : } \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{هـ د}}{\text{د ح}}$$

$$\text{أى أن : } \frac{\text{ارتفاع المرتفع}}{\text{المسافة من المرآة إلى أصل المرتفع}} = \frac{\text{طول قامة الراصد}}{\text{المسافة من المرآة إلى موقف الراصد}}$$

وبذلك يكون ارتفاع المرتفع =

$$\frac{\text{طول قامة الراصد} \times \text{المسافة من المرآة إلى أصل المرتفع}}{\text{المسافة من موضع المرآة إلى موقف الراصد}}$$

المسافة من موضع المرآة إلى موقف الراصد

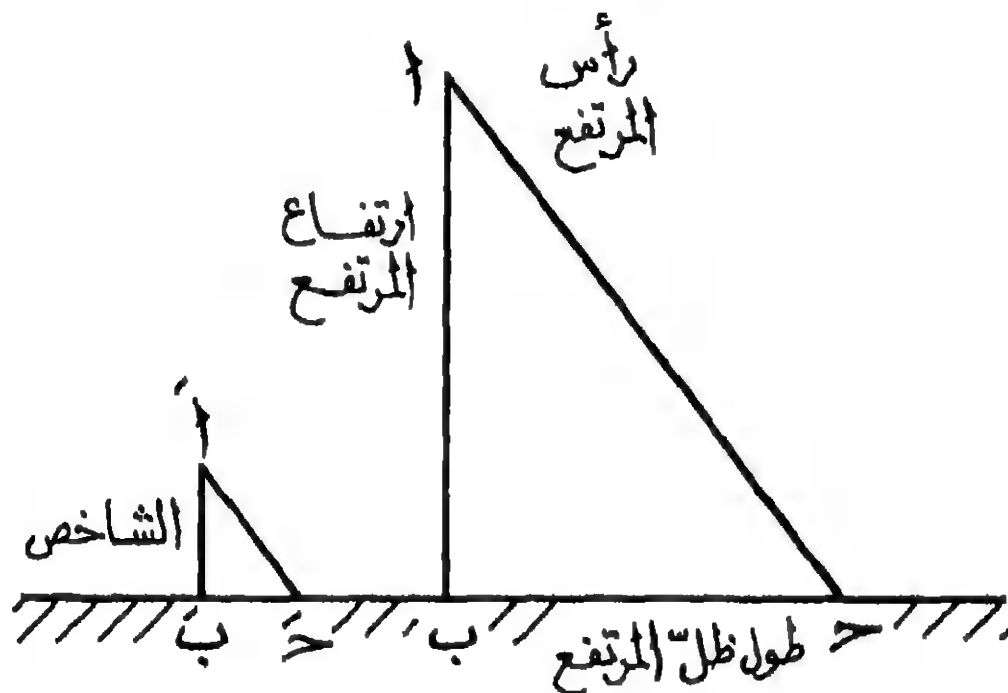


شكل (١٣)

تعيين ارتفاع مرتفع باستخدام مرآة مستوية

أما في الطريق الثالث فإنه يُستعان بقياس طول ظل المرتفع في تحديد ارتفاعه على أساس أن نسبة طول ظل المرتفع إلى ارتفاعه تساوى نسبة طول ظل شاخص معين إلى ارتفاعه . ويبين من شكل (١٤) أن هناك تشابهاً في المثلثين الخاصين بالمرتفع والشاخص .

$$\text{من ذلك تنتج العلاقة : } \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}} = \frac{\text{أ ب'}}{\text{ب' ح'}}$$



شكل (١٤)

تعيين ارتفاع مرتفع بطريق قياس الظل

$$\text{أى أن } \frac{\text{ارتفاع المرتفع}}{\text{طول ظل المرتفع}} = \frac{\text{ارتفاع الشاخص}}{\text{طول ظل الشاخص}}$$

وبقياس ارتفاع الشاخص وطول ظله ، كذلك قياس طول ظل المرتفع فإنه بالتعويض في المعادلة المتقدمة يمكن تعيين ارتفاع المرتفع ، ومن الواضح أنه يُشترط في هذه الطريقة إمكان قياس ظل المرتفع .

أما الطريقتان الباقيتان فإنهما يعتمدان على تكوين مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، أى أن تكون كلٌّ من زاويتي المتساويتين نصف قائمة ، وبذلك يكون قدر المرتفع مساوياً لقدر ظله (عندما تكون الشمس مثلاً مائلة بمقدار ٤٥° على خط الأفق ، أو عندما يُضبط الأسطرلاب ليتخذ هذا الميل مع إدخال قامة الراصد في الاعتبار) .

الفصل الثالث : في معرفة عروض^(١)

الأنهار ، وأعماق الآبار

أمّا الأول فقف على شاطئ النهر وانظر جانبه الآخر من ثقبتي العضادة ، ثمّ أدِرْ^(٢) إلى أن ترى شيئاً من الأرض منهما ، والأسطرباب على وضعه ، فما بين موقفك وذلك الشيء يساوى عرض الشَّهر .

وأمّا الثانى فانصب^(٣) على البئر ما يكون بمنزلة قطر تدويره ، والى ثقبلاً مُشْرِقاً من مُنتصفِ القطر بعد إعلامه . ليصل إلى قعر البئر بطبعه ، ثم انظر المُشْرِق من ثقبتي العضادة بحيث يمرّ الخطّ الشعاعى مقاطعاً للقطر إليه . فاضرب ما بين العلامة ونقطة التقاطع فى قامتك ، واقسم الحاصل على ما بين النقطة وموقفك ، فالخارج عمق البئر .

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

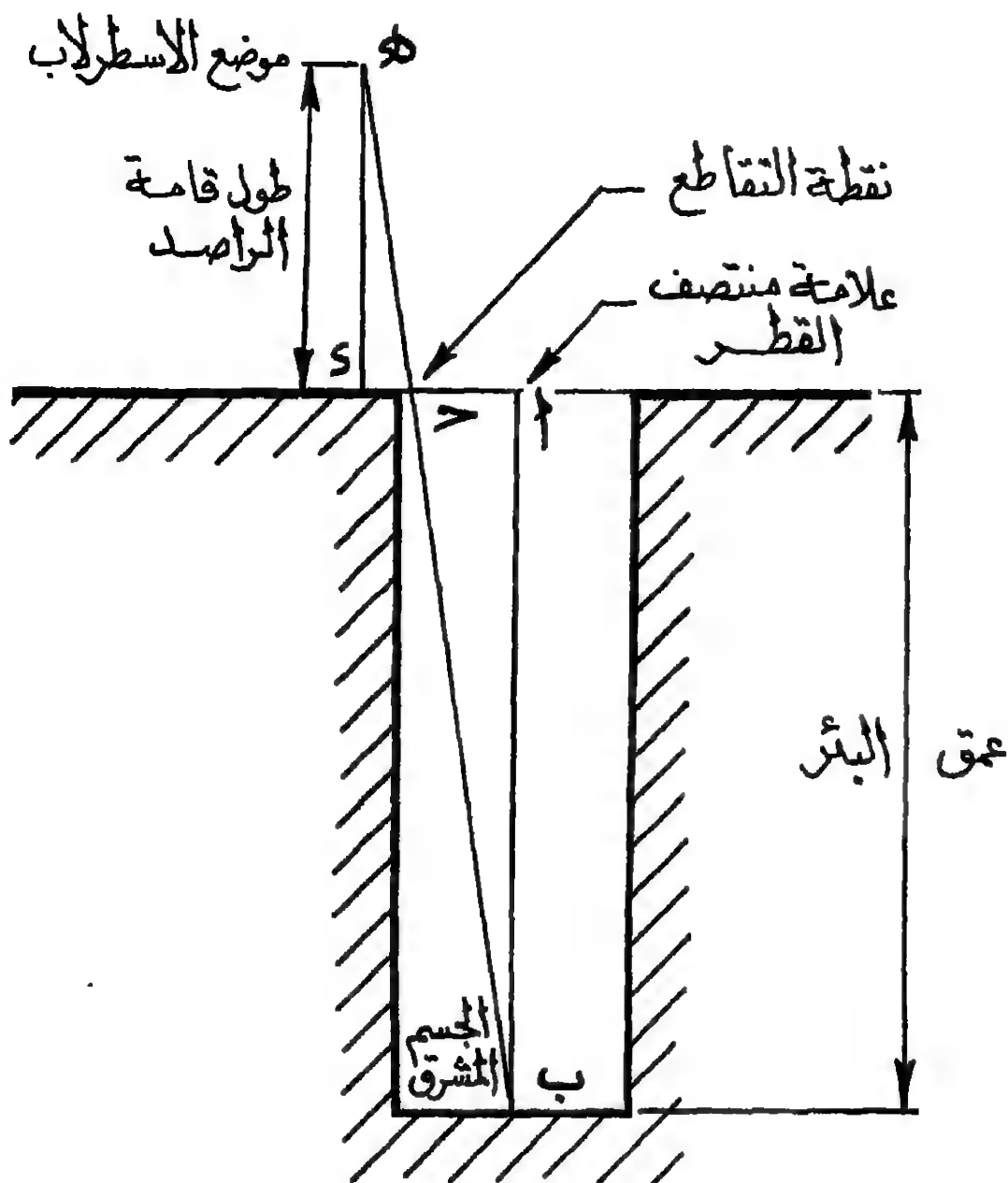
(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : در

(٣) فى المخطوط ٧٥٣ : فانصف وهو تحريف واضح .

شرح : يصف العامل كيفية تعيين عرض مَهر ما باستخدام الأسطرباب ، وتقوم فكرة الرصد على أساس أن يكون عرض النهر ضلعاً فى مثلث قائم الزاوية عند الراصد ومتساوى الساقين ، فأحد الضلعين فى هذا المثلث هو عرض النهر والضلع الآخر هو المسافة من موقف الراصد إلى الشيء الذى يُرى من الأرض من ثقبتي عضادة الاسطرباب بعد إدارته . أى أنه فى هذه الطريقة ننقل - بطريق المثلث القائم المتساوى الساقين - مقدار عرض النهر إلى مسافة يمكن قياسها على اليابسة (جانب النهر) .

أما طريقة قياس عمق بئر ما فتعتمد على تكوين مثلثين متشابهين كما هو موضح فى شكل (١٥) حيث نجد أن :

$$\frac{د ه}{د ح} = \frac{أ ب}{أ ح}$$



شكل (١٥)

قياس عمق بئر باستخدام الأسطرلاب

$$\frac{\text{عمق البئر}}{\text{المسافة بين علامة منتصف القطر ونقطة التقاطع}} = \text{أى أن :}$$

$$\frac{\text{طول القامة}}{\text{المسافة بين نقطة التقاطع وموقف الراصد}} =$$

$$\frac{\text{ما بين العلامة ونقطة التقاطع} \times \text{القامة}}{\text{ما بين نقطة التقاطع وموقف الراصد}} = \text{فيكون عمق البئر}$$

وهو ما جاء بمثل المخطوط .

الباب الثامن

في استخراج المجهولات بطريق الجبر والمقابلة

وفيه فصلان .

الفصل الأول : في المقدمات

يُسَمَّى المجهولُ شيئًا . ومضروبه في نفسه مالا . وفيه كعبًا . وفيه مال مال . وفيه مال كعب . وفيه كعب كعب . وهكذا إلى غير النهاية ، يصير مالين وكعبًا . ثم أحدهما كعبًا . ثم كلُّ منهما كعبًا ، فسابعُ المراتب : مال مال الكعب . وثامنها : مال كعب الكعب . وتاسعها : كعب كعب الكعب . وهكذا . والكلُّ متناسبة صعودًا ونزولاً . فنسبة مال المال إلى الكعب . كنسبة الكعب إلى المال . والمال إلى الشيء . والشيء إلى الواحد . والواحد إلى جزء الشيء . وجزء الشيء إلى جزء المال . وجزء المال إلى جزء الكعب . وجزء الكعب إلى جزء مال المال . وإذا أردت ضرب جنس في آخر . فإن كانا في طرف واحد . فاجمع مراتبهما . وحاصل الضرب يُسَمَّى المجموع ، كمال الكعب . في مال مال الكعب . الأول خماسي . والثاني شباعي . فالحاصل كعب كعب كعب^(١) الكعب^(٢) أربعًا . وهو في الثانية عشر . أو في طرفين . فالحاصل من جنس الفضل . في طرف ذى الفضل ، فجزء مال المال . في مال الكعب . الحاصل الجذر . وجزء كعب كعب الكعب . في مال مال الكعب . الحاصل جزء المال ، وإن لم يكن فضل . فالحاصل من جنس الواحد .

(١) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(٢) في المخطوطين ١٧٧٣ - ١٢٥٣ : كعب .

وتفصيلُ طُرُقِ القِسْمَةِ والتَّجْزِيرِ وباقي الأعمال ، (هو) ^(١) موكولٌ إلى ^(٢) كتابنا الكبير .

ولمّا [كانت الجبريّاتُ التي انتهت إليها أفكارُ الحكماء منحصرةً في الستّ ، و] ^(٣) كان بناؤها على العدَدِ والأشياء والأُمُوال ، وكان هذا الجدول متكفلاً بمعرفة (جنس) ^(٤) جنسيّة حاصل ضربها ، وخارج قِسْمَتها ، أوردناه تسهيلاً واختصاراً ^(٥) ، وهذه صورته :

(٤) زائدة في المخطوط ١٧٧٣ .

(٥) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(١) زائدة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : في .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

شرح : يقدّم العاملُ في هذا الفصل بعض التعاريف الخاصة بعلم الجبر مثل المجهول أو الشيء ، والمال ، والكعب ومراتبها ، وكذا أجزاء الشيء والمال والكعب ومراتبها أيضاً ، ونبين فيما يلي كشفاً مقارناً لهذه التعاريف ومقابلها الرياضي كما نستعمله اليوم :

التعابير التي استعملها العلماء العرب

المقابل الرياضي العصري

المجهول أو الشيء

س

المال = مضروب الشيء في نفسه

س × س = س^٢

الكعب = مضروب الشيء في ماله

س × س^٢ = س^٣

مال مال

س^٢ × س^٢ = س^٤

مال كعب

س^٢ × س^٣ = س^٥

كعب كعب

س^٣ × س^٣ = س^٦

مال مال كعب

س^٢ × س^٢ × س^٢ = س^٦

مال كعب كعب

س^٢ × س^٢ × س^٢ = س^٦

كعب كعب كعب

س^٢ × س^٢ × س^٢ = س^٦

مال مال كعب كعب

س^٢ × س^٢ × س^٢ × س^٢ = س^٨

مال كعب كعب كعب

س^٢ × س^٢ × س^٢ × س^٢ = س^٨

كعب كعب كعب كعب

س^٢ × س^٢ × س^٢ × س^٢ = س^٨

جزء الشيء

$\frac{1}{س} = س^{-١}$

جزء مال

$\frac{1}{س^٢} = س^{-٢}$

جزء كعب

$\frac{1}{س^٣} = س^{-٣}$

= وهكذا ، فلفظ جزء يعنى مقلوب ، أو بتعبيرنا الرياضى عكس إشارة الأس .
ومن الواضح أن حاصل ضرب أشياء مرفوعة إلى أسس متعددة يساوى الشيء
مرفوعاً إلى أس يساوى مجموع أسس (أو قوى) الأشياء المضروبة فى بعضها البعض .
وقد أشار العاملى إلى أن الجبريات تبنى على عناصر أو أجناس ثلاثة هى :

العدد : وهو ما لا يشتمل على الشيء أو المجهول

الأشياء : وهى المحتوية على المجهول : س

الأموال : وهى المحتوية على مربع المجهول أو الشيء : س^٢

وقد أورد العاملى جدولاً يبين حاصل ضرب وخارج قسمة هذه الأجناس .

| | | | |
|----|---------------------|------|-----------------|
| | | ١ | |
| ١ | جزء الشيء | ٢ | شيء |
| ٢ | جزء مال | ٤ | مال |
| ٣ | جزء كعب | ٨ | كعب |
| ٤ | جزء مال مال | ١٦ | مال مال |
| ٥ | جزء مال كعب | ٣٢ | مال كعب |
| ٦ | جزء كعب كعب | ٦٤ | كعب كعب |
| ٧ | جزء مال مال كعب | ١٢٨ | مال مال كعب |
| ٨ | جزء مال كعب كعب | ٢٥٦ | مال كعب كعب |
| ٩ | جزء كعب كعب كعب | ٥١٢ | كعب كعب كعب |
| ١٠ | جزء مال مال كعب كعب | ١٠٢٤ | مال مال كعب كعب |
| ١١ | جزء مال كعب كعب كعب | ٢٠٤٨ | مال كعب كعب كعب |
| ١٢ | جزء كعب كعب كعب كعب | ٤٠٩٦ | كعب كعب كعب كعب |

٥. في المخطوط ١٧٧٣ : ١٢ ، ٢٥ ، ٤٠٩٦ وهي أرقام محرّفة .
هذا الجدول في هامش المخطوط ٧٥٣ ، صفحة ٣٩ .

هذا هو المبدأ الذي عليه
يبنى هذا العلم وهو
الرياضيات وهو العلم
الذي يدرس الكميات
والمقادير والاعتماد
بينها وبين بعضها
وذلك من حيث القوة
والضعف والزيادة
والنقصان والقسمة
والجمع والاضاعاف
والانقاص والاعتدال
وهو العلم الذي لا
يخلو من الغموض والعمق
والجديده والاعتماد
على المنطق والبرهان
والاستدلال والقياس
والاحتساب والاحتراز
والاحتياط والاحتكام
والاحتساب والاحتراز
والاحتياط والاحتكام

ليصل الى قعر البئر بطريقه ثم انظر المشرق من ثقب الصفاة
بعينك ثم الخط الشعاعي مقاطعا للقطر اليه فاضرب
ما بين العلامة ونقطة التقاطع في قاسمك واقسم الحاصل
على ما بين النقطة وموقفك فالخارج على البئر الباب الثامن

في استخراج الجداول بطريق الجبر والمقابلة وفي فصلان

الفصل الاول في المقدمات يسمى المجهول شيئا وبعضه

في نفسه مالا وفيه كعبا وفيه مال مال وفيه مال كعب وفيه

كعب كعب وهكذا الى غير النهاية يصير ما بين وكعبا ثم احدها

كعبا ثم كل منها كعبا فاسبع المراتب مال مال الكعب وثانها

المال والكعب وفرعية هو

شئان سبعة صنفوا ونزولا فاسبع مال المال الى الكعب كنسبة

الكعب الى مال مال الى الشئ والاشئ الى الواحد والواحد الى

الجزء الكعب الى جزء الكعب والاشئ الى جزء الكعب

واحد فان كانا في طرف واحد فاجمع مراتبها وخالص الضرب

يسمى المجموع كال الكعب في مال مال الكعب الاول خماسي والثاني

سباعي فالخالص كعب كعب كعب كعب كعب كعب كعب كعب كعب كعب

الثانية عشر او في طرفين فالخالص من جنس الفصل في طرف

الاول كان الى اصله الذي هو

الاول كان الى اصله الذي هو

الاول كان الى اصله الذي هو

الاول كان الى اصله الذي هو

الاول كان الى اصله الذي هو

الاول كان الى اصله الذي هو

الاول كان الى اصله الذي هو

الاول كان الى اصله الذي هو

الاول كان الى اصله الذي هو

الاول كان الى اصله الذي هو

شكل (١٦)

هذا الفصل في مال المال في مال الكعب الحاصل الجذر جزئيا
 كعب الكعب في مال الكعب الحاصل جزء المال وان لم يكن
 افضل فالجذر من جنس الواحد وتفصيل من التفصيل
 والتجذير وباقي الاعمال هو موكمل في كتابنا الكبير ولما وجدنا
 كانت الجبريت التي انشئت ليعا افعال الحكماء مخصصة في
 ستة وكان بناؤها على العدد والاشياء والاموال وكان
 هذا الجدول متكفلا بمعرفة جنسية حاصل ضربها و
 خارج قسمتها اوردنا تفصيلا واختصارا وهذه صورته

المصمم

| | | | | | |
|------------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|
| المال | الشيء | الواحد | جزء الشيء | جزء المال | الشيء |
| جزء المال | جزء الشيء | جزء المال | جزء الشيء | جزء المال | جزء الشيء |
| الواحد | الشيء | الواحد | جزء الشيء | جزء المال | الشيء |
| جزء المال | جزء الشيء | جزء المال | جزء الشيء | جزء المال | جزء الشيء |
| الشيء | الواحد | الشيء | جزء الشيء | جزء المال | الواحد |
| جزء الشيء | جزء المال | جزء الشيء | جزء المال | جزء الشيء | جزء المال |
| الواحد | الشيء | الواحد | جزء الشيء | جزء المال | الشيء |
| جزء الواحد | جزء الشيء | جزء الواحد | جزء الشيء | جزء المال | جزء الشيء |

المصروب فيه

هذا الجدول هو الذي انشئناه ليعا افعال الحكماء مخصصة في ستة وكان بناؤها على العدد والاشياء والاموال وكان هذا الجدول متكفلا بمعرفة جنسية حاصل ضربها وخارج قسمتها اوردنا تفصيلا واختصارا وهذه صورته

صورة العمل

| | | | | | | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|--------------|-------------|--------------|----------------|--------------|--------------|
| مضروب الواحد | مضروب الاثنين | مضروب الثلاثة | مضروب الأربعة | مضروب الخمسة | مضروب الستة | مضروب السبعة | مضروب الثمانية | مضروب التسعة | مضروب العشرة |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

صورة الثانية

| | | | | | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| عدد الاشياء | عدد الاشياء | عدد الاشياء | عدد الاشياء | عدد الاشياء | عدد الاشياء | عدد الاشياء | عدد الاشياء | عدد الاشياء | عدد الاشياء |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

حاصل الاشياء

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| عدد | عدد | عدد | عدد | عدد | عدد | عدد | عدد | عدد | عدد |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

شكل (١٦) ب

يبدأ التقسيم من هذا الجانب

يبدأ الضرب من هذا الجانب

| المقسوم | | | | | | |
|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|
| | جزء المال | جزء الشيء | الواحد | الشيء | المال | |
| جزء المال | جزء مال المال | جزء الكعب | جزء المال | جزء الشيء | الواحد | |
| جزء الشيء | جزء الكعب | جزء المال | جزء الشيء | الواحد | الشيء | |
| الواحد | جزء المال | جزء الشيء | الواحد | الشيء | المال | |
| الشيء | جزء الشيء | الواحد | الشيء | المال | الكعب | |
| مال المال | الواحد | الشيء | المال | الكعب | مال المال | |
| المال | جزء المال | جزء الشيء | الواحد | الشيء | المال | |
| المضروب | | | | | | |

المقسوم عليه

المضروب فيه

تضرب عدد^(١) أحد الجنسين في الآخر ، فالحاصلُ عددٌ حاصلُ الضربِ من جنسِ الواقعِ في ملتقى المضروبين ، وإن كان استثناءً ويُسمى المستثنى منه زائداً . والمستثنى ناقصاً ، وضرب الزائد في مثله ، والتاقص في مثله زايدٌ ، والمختلفين ناقصٌ ، فاضرب الأجناسَ بعضها في بعضٍ ، واستثنِ الناقصَ من الزائد . فمضروبُ عشرةِ أعدادٍ وشيءٍ في عشرةِ أعدادٍ إلا شيئاً مائة إلا مالاً . ومضروبُ خمسةِ أعدادٍ إلا شيئاً ، في سبعةِ أعدادٍ إلا شيئاً ، خمسةٌ وثلاثون عدداً ومالٌ إلا اثني عشر شيئاً ، ومضروبُ أربعةِ أموالٍ وستةِ أعدادٍ إلا شيئين ، في ثلاثة أشياء إلا خمسةِ أعدادٍ ، اثنا عشر كعباً وثمانية وعشرون شيئاً إلا ستةً وعشرين مالاً (وإلا)^(٢) وثلاثين عدداً .

وفي القسمة يُطلب ما إذا ضربَ في المقسوم عليه يساوى المقسوم ، فيُقسَمُ عدد

| صورة العمل | | الزائد [المضروب] | | الناقص المضروب |
|------------|----------------|-----------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| مضروب فيه | | أربعة أموال | ستة اعداد | إلا شيئين |
| | | اثنا عشر كعباً زايداً | ثمانية عشر شيئاً زائداً | ستة أموال ناقصة |
| الزائد | ثلاثة أشياء | عشرون مالاً ناقصاً | ثلاثون عدداً ناقصاً | عشرة ^(٣) أشياء زائدة |

(١) ناقصة في المخطوطين ١٧٧٣ . ١٢٥٣ .

(٢) زائدة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٣) في المخطوط ٧٥٣ : عشرون وهي مُحَرَّقة .

جنس^(١) المقسوم على^(٢) عدد جنس المقسوم عليه ، وعدد الخارج من جنس ما وقع في ملتقى المقسومين .

(١) - (٢) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

شرح : من الواضح أن حاصل ضرب الزائد في مثله (أى في الزائد) ، والناقص في مثله (أى في الناقص) زائد . أما عند ضرب الكيتين المختلفتين في الإشارة فحاصل ضربهما ناقص (أى سالب) .

والأمثلة التى ساقها العامل لبيان كيفية ضرب الأجناس فى بعضها البعض هى :

| التعبير الوارد بالنص | المقابل الرياضى المعاصر |
|--|--|
| مضروب عشرة أعداد وشئ فى عشرة أعداد إلا شيئاً مائة إلا مالا | $(١٠ + س)(١٠ - س)$ $= ١٠٠ - س^٢$ |
| مضروب خمسة أعداد إلا شيئاً - فى سبعة أعداد إلا شيئاً - خمسة وثلاثون عدداً ومالاً إلا اثني عشر شيئاً . | $(٥ - س)(٧ - س)$ $= ٣٥ + س^٢ - ١٢ س$ |
| مضروب أربعة أموال وستة أعداد إلا شيئين - فى ثلاثة أشياء إلا خمسة أعداد - اثني عشر كعباً وثمانية وعشرون شيئاً إلا ستة وعشرين مالاً وثلاثين عدداً . | $(٤س^٢ + ٦ - ٢ س)(٣س - ٥)$ $= ١٢س^٣ + ٢٨س - ٢٦س^٢ - ٣٠$ |

ويمكن تمثيل جدول صورة العمل لهذا المثال الأخير باستعمال الرموز الرياضية المعاصرة على الوجه التالى ، وهو مقابل تماماً للجدول الوارد فى المخطوط :

| صورة العمل | | المضروب | |
|-------------|-------|---------------|----------|
| | | الزائد | الناقص |
| المضروب فيه | | $٤س^٢ + ٦$ | $٢ - س$ |
| الزائد | $٣س$ | $١٢س^٣ + ١٨س$ | $٦س^٢ -$ |
| الناقص | $٥ -$ | $٢٠س^٢ - ٣٠$ | $١٠ + س$ |

الفصل الثاني : في المسائل الست الجبرية

استخراج المجهولات بالجبر والمُقابلة يحتاج إلى نظر ثاقب ، وحدث صائب ، وإمعان فكر فيما أعطاه السائل . وصرف ذهن فيما يؤدي إلى المطلوب من الوسائل ، فتفرض من ^(١) المجهول شيئاً ، وتعمل ماتضمنة السؤال سالكا على ذلك المنوال لينتهى إلى المُعادلة ، والطرف ذو الاستثناء يُكَمَّلُ ، ويزاد مثل ذلك على الآخر ، وهو الجبر ، والأجناس المتجانسة المتساوية في الطرفين تُسقط منها ، وهو المُقابلة ، ثم المُعادلة إما بين جنس وجنس ، وهي ثلاث مسائل تُسمى المفردات ، أو بين ^(٢) جنس وجنس ، وهي ثلاث أخر تُسمى المقترنات .

الأولى : من المفردات عدد يعدل أشياء ، فاقسمه على عددها يخرج الشيء المجهول ^(٢) .

مثالها : أقر لزيد ألف ونصف ما لعمرو ، ولعمرو ألف إلا نصف ما لزيد ، فافرض ما لزيد شيئاً ، فلعمرو ألف إلا نصف شيء ، فلزيد ألف وخمسمائة إلا ربع شيء ، يعدل شيئاً ، وبعد الجبر ألف وخمسمائة يعدل شيئاً وربعاً ، فلزيد ألف ومائتان ، ولعمرو أربعمائة .

(١) زائدة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

شرح : في هذا الفصل يعرض العامل للصيغ الست المعروفة على وقته للمعادلات الجبرية من الدرجتين الأولى والثانية ، وقد قسمت هذه الصيغ الست إلى مجموعتين هي المفردات والمقترنات وبيانها كما يلي :

المسائل المفردات : وفيها جنس مفرد يُعَادِلُ جنساً مفرداً آخر فحسب :

(١) عدد يعدل أشياء :

$$\text{أى ح} = \text{ب س} \quad : \quad \therefore \text{س} = \frac{\text{ح}}{\text{ب}} =$$

= (٢) أشياء تعدل أموالاً :

أى ب س = أ س^٢

(٣) عدد يعدل أموالاً :

أى ح = أ س^٢

$$\frac{ب}{أ} = س \quad \therefore$$

$$\frac{ح}{أ} = س \quad \therefore$$

فبالنسبة للمفردة الأولى ، نفرض - حسب المثال المبين - أن ما مع زيد س ،

فيكون ما مع عمرو $(\frac{س}{٢} - ١٠٠٠)$ ، ويكون ما مع زيد $١٠٠٠ + \frac{١}{٢}$
 $(\frac{س}{٢} - ١٠٠٠)$ طبقاً لمعطيات المثال .

وبالتالى فإن ما لزيد هو س

$$كذا هو $١٠٠٠ + \frac{١}{٢} (\frac{س}{٢} - ١٠٠٠)$$$

ومن ثمّ فإن هاتين الكميتين لابد وأن يكونا متساويين ، وبذلك نحصل على المعادلة :

$$س = ١٥٠٠ - \frac{١}{٤} س$$

$$فبالجبر $١٥٠٠ = س + \frac{١}{٤} س$$$

$$\therefore س = ١٢٠٠ = ما لزيد$$

$$أمّا ما لعمرو فيساوى $(\frac{١٢٠٠}{٢} - ١٠٠٠) = ٢٠٠$$$

الثانية : أشياء تعدلُ أموالاً ، فأقسم عددَ الأشياء على عددِ الأموال . فالحارجُ هو الشيءُ المجهولُ . مثالها : أولادُ انتهوا تركَةَ أبيهم . وكانت دنانير . بأن أخذ الواحدُ ديناراً والآخر دينارين ، والآخر ثلاثةً ، وهكذا بتزايد واحد^(١) ، فاسترد الحاكمُ ما أخذوه . وقسمه بينهم بالسوية . فأصاب كلَّ واحدٍ سبعةً ، فكم الأولاد والدنانير . فافرض (الدنانير)^(٢) شيئاً ، وخذ طرفيه أعنى واحداً وشيئاً . واضربه في نصفِ الشيء يحصل نصفُ مالٍ ونصفُ شيءٍ ، وهو عددُ الدنانير . إذ^(٣) مضروبُ الواحدِ مع أيِّ عددٍ في نصفِ العددِ يساوي مجموعَ الأعدادِ المتواليةِ من الواحدِ إليه . فأقسم عددَ الدنانير على شيءٍ ، وهو عددُ الجماعةِ ، لتخرج سبعةً كما قال السائلُ . فاضرب السبعةَ في الشيء ، وهو المقسومُ عليه . يحصل سبعةً أشياء يعدلُ نصفَ مالٍ ونصفَ شيءٍ . وبعد الجبرِ والمُقابلةِ مالٌ يعدلُ ثلاثة عشر شيئاً . فالشيءُ ثلاثة عشر . وهى عدد الأولاد ، فاضربه في سبعةٍ . فالدنانيرُ أحدٌ وتسعون ، ولك استخراج هذه وأمثالها بالخطأين . كأن تفرض الأولاد خمسةً . فالخطأ^(٤) الأول أربعة ناقصةً ، ثم تسعة . فالثاني اثنان كذلك . فالحفوظُ الأول عشرة . والثاني ستة وثلاثون . والفضلُ بينهما ستة وعشرون . وبين الخطأين اثنان .

وهنا طريقٌ آخر أسهل وأخصر هو أن يُضعفَ خارجُ القسمةِ . فالحاصلُ إلّا واحداً عدد^(٥) الأولاد .

(١) في المخطوط ١٧٧٣ : وهكذا بتزايد واحداً واحداً .

(٢) صحته عدد الأولاد . والتحريف واضح من سياق المثال .

(٣) في المخطوط ١٧٧٣ : أو .

(٤) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(٥) في المخطوط ١٢٥٣ : أعداد .

شرح : في مثال المفردة الثانية . نفرض أن عدد الدنانير موضوع الحركة يساوى ج ، وأن عدد الأولاد س .

فعند انتهاء الحركة كان نصيب الأولاد يتبع متوالية حسابية تبدأ بالواحد ويزيد كلُّ حدٍّ فيها عن سابقه بواحدٍ . ومجموعُ هذه المتوالية هو بلا شك الدنانير ج . =

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \dots + س = ح$$

حيث س عدد الأولاد .

ولما كان نصيب كل ولد - عند تقسيم العركة بينهم بالتساوى - هو ٧ دنانير :
 $\therefore ح = ٧س$ (أى نصيب كل ولد \times عدد الأولاد)

وحيث إن مجموع المتوالية الحسابية :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + س = \frac{س}{2} (س + 1)$$

$$\therefore ح = ٧س$$

وبالتالى نحصل على المعادلة :

$$\frac{س}{2} (س + 1) = ٧س$$

$$\frac{س^2}{2} + \frac{س}{2} = ٧س$$

(سبعة أشياء تعدل نصف مال ونصف شيء)

وبعد الجبر والمقابلة :

$$س = ١٣ = \text{عدد الأولاد}$$

$$\bullet \text{ العركة بالدنانير } = ١٣ \times ٧ = ٩١ \text{ ديناراً}$$

ويشير العامل فى نهاية هذا المثال إلى تطبيق طريقة الخطأين فى حل المسألة .

أما الطريقة المختصرة التى يذكرها فى خاتمة المثال . فهى بلاشك معتمدة على المعادلة :

$$٧س = \frac{س}{2} (س + 1) \text{ أو } (١ - ٢ \times ٧) = س \bullet \text{ حيث العدد } ٧ \text{ هو خارج}$$

قسمة العركة بالتساوى بين الأولاد .

الثالثة : عددٌ يعدلُ أموالاً . فاقسمه على عددها وجذّر . الخارجُ الشيءُ المجهولُ .

مثالها : أُقِرَّ لزيدٍ بأكثرَ المَالَيْنِ اللَّذَيْنِ مجموعهما عشرون . ومُسَطَّحُهَا ستةٌ وتسعون . فافرض أحدهما عشرةً وشيئاً . والآخرَ عشرةً إلّا شيئاً . فمُسَطَّحُهَا وهو مائةٌ إلّا مالاً يعدلُ ستةً وتسعين . وبعد الجبر والمقابلة يعدلُ المالُ أربعةً . والشيءُ اثنان . فأحدُ^(١) المَالَيْنِ ثمانية . والآخرُ اثنا عشر . وهو [المطلوب]^(٢) .

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) ربدت ليستقيم المعنى .

شرح : في مثال المفردة الثالثة المطلوب إيجاد عددين مجموعهما عشرون . وحاصل ضربهما ستة وتسعون .

يفرض أحد العددين $(١٠ + س)$

فيكون الثاني $(١٠ - س)$

وهذا يحقق الشرط الأول وهو أن المجموع = ٢٠

أما الشرط الثاني فيعني أن :

$$(١٠ + س)(١٠ - س) = ٩٦$$

$$\text{أى أن } ١٠٠ - س^٢ = ٩٦$$

$$\text{فبعد الجبر والمقابلة : } س^٢ = ٤ \cdot س = ٢$$

فيكون أحد العددين المطلوبين ٨ والثاني ١٢ .

المقترنة^(١) الأولى من المقترنات

عددٌ يعدلُ أشياءً وأموالاً ، فكمُّلُ المالِ واحدًا إن كان أقلَّ منه^(٢) ، وزدَّه إليه إن كان أكثرَ ، وحوِّلُ العددَ والأشياءَ إلى تلكِ النسبةِ بقسمةِ عددٍ كُلُّ على عددِ الأموالِ ، ثمَّ رُبَّعَ نصفَ عددِ الأشياءِ ، وزدَّه على العددِ ، وانقُصْ من جذرِ المجموعِ نصفَ عددِ الأشياءِ ليبقى (في نفسه)^(٣) العددُ المجهولُ .

مثالها : أُقِرَّ لزيدٍ من العشرةِ بما مجموعُ مُربَّعهِ ومضروبهِ في نصفِ باقيها اثنا عشر . فافرضه شيئًا ، فمربَّعهُ مالٌ ، ونصفُ القسمِ الآخرِ خمسةٌ إلاَّ نصفَ شيءٍ . ومضروبُ الشيءِ فيه خمسةٌ أشياءً إلاَّ نصفَ مالٍ ، فنصفُ مالٍ وخمسةٌ أشياءً تعدلُ اثني عشرَ ، فمالٌ وعشرةٌ أشياءً يعدلُ أربعةً وعشرينَ ، نقصنا نصفَ (عددِ الأشياءِ)^(٤) من جذرِ مجموعِ مُربَّعِ نصفِ عددِ الأشياءِ والعددِ ، بقي اثنان . وهو [المطلوب]^(٥) .

(١) وردت في المخطوطات مُحرَّفة تحت : المقترنة .

(٢) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

(٣) زائدة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٥) زيدت ليكمل المعنى .

شرح : المسائلُ المُقترَنة ، وفيها جنسٌ يعدلُ جنسين (مقترنين) لهما نفس الإشارةُ الجبرية : في هذه المجموعة الثانية من المعادلات ، وهى ثلاث مسائل ، تتم المعادلة فيها بين جنس و جنسين (بخلاف المسائل المفردات التى تكون المعادلة فيها بين جنسٍ و جنسٍ فحسب) . وهذه المسائل هى :

(١) عدد يعدلُ أشياءً وأموالاً :

$$\text{أى ح} = \text{ب س} + \text{أ س}^2$$

(٢) أشياء تعدلُ عددًا وأموالاً :

$$\text{أى ب س} = \text{ح} + \text{أ س}^2$$

(٣) أموالٌ تعدلُ عددًا وأشياء

$$\text{أى أ س}^2 = \text{ح} + \text{ب س}$$

المقترنة الأولى : يمكن شرح طريقة الحل بمقابلة النص مع الصيغة الرياضية بالرموز كما نألفها اليوم . وذلك كما يلي :

الصيغة الرياضية المقابلة

نصّ المخطوط

عدد يعدل أشياء وأموالاً : $ح = ب س + أ س^2$

حوّل العدد والأشياء إلى تلك النسبة

بقسمة عدد كل على عدد الأموال : $\frac{ح}{أ} = \frac{ب}{س} + س$

ثم رُبّع نصف عدد الأشياء وزده

على العدد : $\frac{ح}{أ} + 2\left(\frac{ب}{2أ}\right)$

وانقص من جذر المجموع نصف عدد

الأشياء ليبقى العدد المجهول

$$س = \sqrt{\frac{ح}{أ} + 2\left(\frac{ب}{2أ}\right)} - \frac{ب}{2أ}$$

أى أن حل معادلة الدرجة الثانية :

$$أ س^2 + ب س = ح$$

$$س = \frac{\sqrt{\frac{ب^2}{4} + 4أ ح} - \frac{ب}{2}}{2أ}$$

وليس لبهاء الدين العامل فضل في هذا الحل الذى كان معروفاً قبله بنحوالى ثمانية قرون .

والمقابل التحليلي لمثال المقترنة الأولى هو :

أقتر لزید من العشرة بما مجموع مُربّعه

ومضروبه فى نصف باقىها اثنا عشر : $س^2 + س\left(\frac{10-س}{2}\right) = 12$

فربّعه مال . ونصف القسم الآخر خمسة

إلا نصف شىء . ومضروب الشىء فيه

خمس أشياء إلا نصف مال : $س^2 + 5س - \frac{1}{4}س^2 = 12$

المقترنة^(١) الثانية : أشياء تعدل عددًا وأموالاً ، فبعد التكميل أو الرد تُنقص العدد من مُربّع نصف عدد الأشياء . وتزيد جذر الباقي على نصفها . أو تُنقصه منه ، فالحاصل هو الشيء المجهول .

مثالها : عدد ضرب في نصفه . وزيد على الحاصل اثنا عشر ، حصل خمسة أمثال العدد ، فاضرب شيئاً في نصفه فنصف مالٍ . مع اثني عشر يعدل خمسة أشياء . فالأربعة وعشرون يعدل عشرة أشياء . فانقص الأربعة والعشرين من مُربّع الخمسة يبقى واحدٌ ، وجذره واحدٌ ، فإن زدته على الخمسة أو نقصته منها يحصل المطلوب .

الثالثة : أموالٌ تعدل عددًا وأشياء ، فبعد التكميل أو الرد تزيد مُربّع نصف عدد الأشياء على العدد ، وجذر المجموع [وزده]^(٢) على نصف عدد الأشياء . فالمُجموعُ الشيء المجهول .

مثالها : عددٌ نقص من مُربّعه وزيد الباقي على المُربّع حصل عشرة ، نقصنا من المال الأول^(٣) شيئاً . وكملنا العمل صار مائتين إلا شيئاً تعدل عشرة ، وبعد الجبر

(١) وردت في المخطوطات مُعرّفة تحت : المقترنة

(٢) أضيفت ليتم المعنى ويتسق مع المثال المعطى .

(٣) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

= فنصف مالٍ وخمسة أشياء تعدل اثني عشر

$$: \frac{1}{4} \text{ س}^2 + ٥ \text{ س} = ١٢$$

$$\text{فقال} \text{ وعشرة أشياء يعدل أربعة وعشرين} : \text{س}^2 + ١٠ \text{ س} = ٢٤$$

نقصنا نصف عدد الأشياء من جذر

مجموع مُربّع نصف عدد الأشياء

والعدد . بقي

$$: \text{س} = \sqrt{\frac{10}{2} - 24 + 2 \left(\frac{10}{2} \right)}$$

اثنان . وهو المطلوب

$$= \sqrt{٥ - ٤٩} = ٢$$

إذن فما أُقِرَّ به لزيد من العشرة هو اثنان .

والرد مالٌ يعدلُ خمسةَ أعدادٍ ونصفَ شيءٍ ، فربَّعُ نصفِ عددِ الأشياءِ مُضافاً إلى الخمسة خمسةٌ ونصفُ ثَمَنٍ ، جذره اثنان وربع ، تزيد عليه رُبْعاً يحصل اثنان ونصف وهو المطلوب .

شرح : يمكن تمثيل المقرنة الثانية بالرموز الرياضية المعاصرة على الوجه التالي :

أشياء تعدل عدداً وأموالاً
والحل كما ورد في النص :
فبعد التكميل أو الرد

$$: \text{ب س} = \text{ح} + \text{أ س}^2$$

$$: \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ س} = \frac{\text{ح}}{\text{أ}} + \text{س}^2$$

تُنقص العدد من مربع نصف عدد الأشياء
وتزيد جذر الباقي على نصفها . أو تنقصه منه
فالحاصل هو الشيء المجهول

$$: \frac{\text{ح}}{\text{أ}} - \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \right)^2$$

$$\frac{\text{ح}}{\text{أ}} - \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \right)^2 \sqrt{\pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}}}$$

$$: \text{س} = \frac{\text{ح}}{\text{أ}} - \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \right)^2 \sqrt{\pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}}}$$

في مثال المقرنة الثانية :

نفرض العدد المجهول : س

فتكون المعادلة طبقاً لمنطوق النص : $\frac{1}{4} \text{ س}^2 + 12 = 5 \text{ س}$

فالـ وأربعة وعشرون يعدل عشرة

أشياء : $\text{س}^2 + 24 = 10 \text{ س}$

فانقص الأربعة والعشرين من مربع الخمسة

يبقى واحدٌ . وجذره واحدٌ
فإن زدته على الخمسة أو نقصته منها

يحصل المطلوب : $\text{س} = \left(1 \pm \frac{1}{4} \right)$

أي أن : $\text{س} = 6 \text{ أو } 4$

ونحن نعلم أن المعادلة : $س^2 - ١٠س + ٢٤ = صفرًا$
 يمكن وضعها على الصورة : $(س - ٦) (س - ٤) = صفرًا$
 وبالتالي فالقيمتان المحققتان لها هما : $س = ٦$ أو $س = ٤$

أما المقارنة الثالثة

فالصيغة الرياضية لها هي :

أموال تعدل عددًا وأشياء : $أ س^2 = ح + ب س$

وخطوات الحل هي :

فبعد التكميل أو الرد : $س^2 = \frac{ب}{أ} + \frac{ح}{س}$

تزيد مُربّع نصف عدد الأشياء على العدد : $\frac{ب}{١٢} + ٢(\frac{ح}{١٢})$

وجذرُ المجموع [وزده] على نصف عدد الأشياء : $\sqrt{\frac{ب}{١٢} + \frac{ح}{١٢} + ٢(\frac{ب}{١٢})}$

فالمجتمع الشيء المجهول : $س = \sqrt{\frac{ب}{١٢} + \frac{ح}{١٢} + ٢(\frac{ب}{١٢})}$

في المثال الذى ساقه العاملى لهذه المقارنة :

نفرض العدد المطلوب إيجاد س

فتكون المعادلة حسب معطيات المثال : $س^2 - س + س^2 = ١٠$

(نقصنا من المال الأول شيئًا ، وكملنا العمل

صار مالين إلا شيئًا تعدل عشرة)

وبعد الجبر والرد مالٌ يعدل خمسة أعداد

ونصف شيء : $س^2 = ٥ + \frac{١}{٢} س$

فمربّع نصف عدد الأشياء مضافًا إلى الخمسة .

خمسة ونصف ثمن : $\frac{١}{٤} + ٥ = ٥ + \frac{١}{٤}$

جذره اثنان وربع : $\sqrt{\frac{١}{٤} + ٥} = \frac{٩}{٤} = \frac{٨١}{١٦}$

تزيد عليه رُبْعًا [وهو نصف عدد الأشياء]

يحصل اثنان ونصف . وهو المطلوب : $s = \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{4} = 2 \frac{1}{2}$
 والنتيجة صحيحة ويمكن الحصول عليها بالتعويض المباشر في المعادلة السابقة
 مباشرة على المثال بالقيم : $a = 1$ ، $b = \frac{1}{4}$ ، $c = 5$

هذا ومن الممكن وضع معادلة الدرجة الثانية في الصورة العامة :
 $as^2 + bs + c = 0$ صفرًا

ويكون حلها العام على الوجه التالى :

$$s = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

أمّا المقرونات الثلاث فها هي إلا حالات خاصة من هذه الحالة العامة ، يمكن
 التوصل إليها بتغيير إشارة ج أو ب أو كليهما على التوالى إلى الإشارة السالبة .

الباب التاسع

في قواعد شريفة وفوائد لطيفة لآلة المحاسب
منها ولا غناء^(١) له^(٢) عنها^(٣)

ولنقتصر في هذا المختصر على اثني عشر :

الأولى :

وهي مما سنع بخاطري العابر^(٤) .

إذا أردت مضروب عدد في نفسه وفي جميع ماتحته من الأعداد . فزد عليه واحداً . واضرب المجموع^(٥) في مربع العدد ، فنصف الحاصل هو المطلوب .
مثالها : أردنا مضروب التسعة . كذلك^(٦) ضربنا العشرة في أحد وثمانين .
فالاربعمائة والخمسة هي المطلوب .

(١) في المخطوط ١٧٧٣ : غنى .

(٢) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) في المخطوطين ١٢٥٣ . ١٧٧٣ : الفاتر .

(٥) في المخطوط ٧٥٣ : المجتمع .

(٦) في المخطوط ١٢٥٣ : كذا .

شرح : يمكن التعبير عن القاعدة الأولى بالرموز الرياضية المعاصرة على الوجه التالي :

$$= \frac{n \cdot (n + 1)}{2} = [1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n]$$

ويتضح من الطرف الأيمن للمعادلة أن المطلوب إيجاد حاصل ضرب العدد n في حاصل جمع الأعداد بتسلسلها الطبيعي حتى العدد n .

ولإيجاد مجموع المتوالية الحسابية : $[1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n]$ نلاحظ أن مجموع العدد الأول والأخير من هذه المتوالية هو $(n + 1)$ ، كذلك فإن مجموع العدد الثاني والعدد قبل الأخير من نفس المتوالية هو :

$$2 + (n - 1) = (n + 1)$$

وهكذا يبقى المجموع ثابتاً حيث إن الزيادة التي تطرأ على العدد الثاني مثلاً تساوى النقص الذي يطرأ على العدد قبل الأخير من المتوالية . ومن ثم يكون مجموع المتوالية الحسابية هذه هو $(n + 1)$ مضروباً في عدد أزواج الأعداد التي يتتبع من مجموع كل زوج منها $(n + 1)$ ، ومن الواضح أن عدد هذه الأزواج هو نصف العدد الكلي لحدود المتوالية أى $\frac{n}{2}$.

∴ مجموع المتوالية الحسابية $[1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n]$ هو : $(n + 1) \cdot \frac{n}{2}$

ويكون حاصل ضرب أى عدد n في المتوالية الحسابية من الواحد حتى العدد نفسه n هو :

$$(n + 1) \cdot \frac{n}{2} = n \times \frac{n}{2}$$

مجموع المتوالية الحسابية

وهو ما جاء بالقاعدة الأولى .

والمثال الذى ضربه العامل هو مضروب 9 في مجموع الأرقام من التسعة إلى الواحد أى

$$9 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)$$

$$= \frac{9 \times (1 + 9)}{2} = 405 \text{ وهو صحيح .}$$

الثانية :

إذا أردت جمع الأفراد على النظم الطبيعي ، فزد الواحد على الفرد الأخير ،
وربّع نصف المجتمع .

مثالها : إذا قيل ^(١) جمع الأفراد من الواحد إلى التسعة :
فالجواب خمسة وعشرون .

(١) ناقصة في المخطوطين ١٢٥٣ . ١٧٧٣ .

شرح : تناول القاعدة الثانية جمع الأعداد المفردة حسب تسلسلها الطبيعي بدءاً من
الواحد . ويمكن تمثيلها بالمعادلة :

$${}^2\left[\frac{1 + n}{2}\right] = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (n - 2) + n$$

حيث n عدد مفرد صحيح .

ولقد ساق العامل مثلاً هو جمع الأفراد من الواحد حتى التسعة :

$$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 : n = 9$$

$$25 = {}^2\left(\frac{10}{2}\right) = {}^2\left[\frac{1 + n}{2}\right]$$

فالقاعدة إذن صحيحة .

مثال آخر هو جمع الأفراد على النظم الطبيعي حتى ١٩ ، فالجواب هو :

$$100 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

وحيث إن $n = 19$

فالقاعدة صحيحة .

$$100 = \frac{{}^2(1 + n)}{2} \therefore$$

جَمْعُ الأزواجِ دونَ الأفرادِ :

تضرب نصف الزوج الأخير فيما يليه بواحد .

مثالها : من الاثنين إلى العشرة : ضربنا الخمسة في الستة .

شرح : تتعرض القاعدة الثالثة لجمع الأعداد الزوجية حسب تسلسلها الطبيعي .
فتقول إن حاصل الجمع يساوى نصف العدد الزوجى الأخير فى المسلسلة مضروباً فى العدد التالى لنصف هذا العدد الزوجى الأخير . وتمثل هذه القاعدة رياضياً على الوجه التالى :

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + (2 - n) + n = \frac{n}{2} \cdot \left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

حيث ن عدد زوجى صحيح .

والمثل الذى ضربه العاملى لهذه القاعدة هو مجموع الأعداد الزوجية من ٢ إلى ١٠ .

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

وحيث إن $n = 10$ فالمجموع حسب هذه القاعدة $= \frac{10}{2} \cdot \left(1 + \frac{10}{2}\right) = 30$

ونقدم مثلاً ثانياً هو مجموع الأعداد الزوجية حتى ٢٢ فنجد أن :

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 = 132$$

ولما كانت $n = 18$ فى هذا المثال . فإن مجموع هذه المتوالية طبقاً للقاعدة الثالثة هو

$$132 = 12 \times 11 = \frac{22}{2} \cdot \left(1 + \frac{22}{2}\right)$$

مما يؤيد سلامة القاعدة المذكورة .

الرابعة :

جَمْعُ المَرَبَّعات المتوالية : تزيد واحداً على ضِعْفِ العددِ الأخير ، وتضربُ ثلثَ المجتمعِ في مجموعِ تلك الأعداد .

مثالها : مُرَبَّعاتُ الواحدِ إلى الستة^(١) : زِدْنَا على ضِعْفِهَا^(٢) واحداً ، وثَلَّثُ الحاصِلِ أربعةً وثَلَّثُ . فاضْرِبْهُ في مجموعِ تلك الأعدادِ ، وهو أحدٌ وعشرون . فالواحدُ وتسعون^(٣) جوابٌ .

(١) في المخطوط ١٧٧٣ : ستة .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : ضعف الستة .

(٣) في المخطوط ١٧٧٣ : والتسعون .

شرح : تبين القاعدة الرابعة كيفية جمع مربعات الأعداد حسب تسلسلها الطبيعي وتتخذ الصيغة الرياضية الآتية :

$$+ ٠٠ + ٣ + ٢ + ١] \frac{(١ + ن ٢)}{٣} = (٢ن + ٠٠٠٠ + ٢٤ + ٢٣ + ٢٢ + ٢١) [ن$$

في المثال الوارد في النصِّ يُعطى العاملُ مجموع مربعات الواحد إلى الستة فيقول إن

$$(٢١ + ٢٢ + ٢٣ + ٢٤ + ٢٥ + ٢٦)$$

$$٩١ = ٢١ \times ٤ \frac{١}{٣} = (٦ + ٥ + ٤ + ٣ + ٢ + ١) \frac{١ + ٢ \times ٦}{٣}$$

وهو المجموع الصحيح .

وكمثال آخر نختبر صحة القاعدة بالنسبة لمجموع مربعات الأعداد حتى العدد ١٣ ، أي

$$[١٣ + ٠٠٠ + ٣ + ٢ + ١] \frac{(١ + ١٣ \times ٢)}{٣} = \text{فالمجموع } ١٣ = ن$$

$$= ٩١ \times ٩ = ٨١٩ \text{ وهو فعلاً مجموع مربعات الأعداد من } ١ \text{ حتى } ١٣ .$$

وبالرجوع إلى المعادلة الرياضية الممثلة للقاعدة الرابعة نجد أن الطرف الأيسر للمعادلة يشتمل على مجموع المتوالية الحسابية من الواحد حتى العدد ن ، وحيث إن مجموع هذه المتوالية = $\frac{ن(١ + ن)}{٢}$ كما تقدم شرحه في القاعدة الأولى ، فإنه من الممكن وضع القاعدة الرابعة على النحو التالي :

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2)$$

$$= \frac{(1+n) \cdot n}{2} \cdot \frac{(1+n) \cdot 2}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+1) \cdot 2}{3 \times 2 \times 1}$$

وهي الصيغة التي نألفها في كتبنا الرياضية المعاصرة .

ولعلَّ أبا بكر فخر الدين محمد بن الحسن الكرخي الحاسب (المتوفى عام ١٠٢٩ م) أول من برهن القوانين الخاصة بمجموع المتوالية المشتملة على مربعات الأعداد الطبيعية ، كذا مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية ، وهذا المجموع الأخير هو موضوع القاعدة الخامسة الآتية .

جَمْعُ المكعَّباتِ المتوالية : تُرَبَّعَ مجموع تلك الأعدادِ المتوالية من الواحد .

مثالها : مُكعَّباتُ الواحدِ إلى الستة : رَبَّعْنَا الأَحَدَ والعشرين ، فالأربعمائة واحدٌ وأربعون جواب .

شرح : المقابل الرياضى للقاعدة الخامسة هو :

$${}^2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = ({}^3_1 + {}^3_2 + {}^3_3 + \dots + {}^3_n) \\ \text{وبتطبيقه على مجموع مكعَّبات الواحد إلى الستة ، فإننا نجده مساويًا لـ } {}^2(21) = 441 .$$

ولما كان الطرف الأيسر من المعادلة هو مربع مجموع المتوالية الحسابية من الواحد إلى العدد n - ولما كان مجموع هذه المتوالية - بالرجوع إلى القاعدة الأولى - يساوى

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

فإنه يمكن وضع القاعدة الخامسة على الصورة :

$$= ({}^3_1 + {}^3_2 + {}^3_3 + \dots + {}^3_n)$$

$${}^2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

وهى المعادلة التى نستعملها اليوم لإيجاد مجموع مكعبات الأعداد بتسلسلها الطبيعى .

السادسة :

إذا أردت مُسَطِّحَ جَذَرَيَّ عِدَدَيْنِ مُنْتَطَقَيْنِ أَوْ أَصَمَّيْنِ أَوْ مُخْتَلَفَيْنِ :

فَاضْرِبْ أَحَدَهُمَا فِي الْآخِرِ ، وَجَذَرُ الْمُجْتَمِعِ جَوَابٌ .

مثالها :

مُسَطِّحَ جَذَرَيَّ الْخَمْسَةِ مَعَ الْعَشْرَيْنِ : فَجَذَرُ الْمِائَةِ جَوَابٌ .

* * *

السابعة :

إذا أردت قِسْمَةَ جَذَرٍ عِدَدٍ عَلَى جَذَرٍ آخَرَ :

فَاقْسِمِ أَحَدَ الْعِدَدَيْنِ عَلَى الْآخَرِ ، وَجَذَرُ الْخَارِجِ جَوَابٌ .

مثالها :

جَذَرُ مِائَةٍ عَلَى جَذَرٍ خَمْسَةٍ وَعَشْرَيْنِ : فَجَذَرُ الْأَرْبَعَةِ جَوَابٌ .

شرح القاعدة السادسة : إذا رمزنا للعديدين المنطقيين أَوْ الْأَصَمَّيْنِ بِالرَّمْزَيْنِ م ، ن فَإِنَّ

القاعدة تنص على ما يلي :

$$\sqrt{م} \cdot \sqrt{ن} = \sqrt{م \cdot ن} \text{ وهذا صحيح .}$$

(ملحوظة : كلمة «مسطح» الواردة في النص تعني حاصل ضرب)

$$\text{مثاله : } \sqrt{١٠} \times \sqrt{١٠} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$$

* * *

شرح القاعدة السابعة : بفرض العديدين في القاعدة السابعة م ، ن ، فإنه يمكن تمثيل

منطوق القاعدة رياضياً على الوجه التالي :

$$\frac{\sqrt{م}}{\sqrt{ن}} = \sqrt{\frac{م}{ن}} \text{ وهذا صحيح تماماً ومكتمل للقاعدة السادسة}$$

$$\text{مثاله : } \frac{\sqrt{١٠٠}}{\sqrt{٢٥}} = \sqrt{\frac{١٠٠}{٢٥}} = \sqrt{٤} = ٢$$

الثامنة :

إذا أردتَ تحصيلَ عددٍ تامٍ ، وهو المساوى أجزأه . أى ^(١) مجموع الأعدادِ العادَّةِ له :

فاجمع أعداداً متواليةً ^(٢) من الواحد على التَّضاعفِ . فالمجموعُ إن كان لا يعبده غير الواحد ، فاضربه في آخرها . فالحاصلُ تامٌ .

مثالها :

جمعنا الواحدَ والاثنين والأربعة ، وضرينا السَّبعةَ في الأربعة . فالثنائيةُ والعشرون عددٌ تامٌ .

القاعدة الثامنة :

(١) في المخطوطين ٧٥٣ - ١٢٥٣ : وهى .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : الأعداد المتوالية .

شرح : تختص القاعدة الثامنة بخواص العدد التام ، والعدد التام هو ذلك العدد الذى يساوى مجموع الأعداد المكونة له العدد نفسه .

مثال العدد التام العدد ٦ حيث إن مكوناته أو عوامله هى ١ . ٢ . ٣ وبمجموعها ٦ . وبالتالي فالعدد ٦ عدد تام .

أما إذا نقص العدد عن مجموع مكوناته فالعدد ناقص ، وإن زاد فهو عدد زائد ، فمثال العدد الناقص العدد ١٢ حيث إن مجموع مكوناته هو : $(1 + 2 + 3 + 4 + 6) = 16$. فالعدد ١٢ ينقص عن مجموع مكوناته وبالتالي فهو عدد ناقص .

أما مثال العدد الزائد فهو العدد ٨ . حيث إن مجموع مكوناته هو : $(1 + 2 + 4) = 7$ ، وبالتالي فالعدد ٨ عدد زائد حيث إنه يزيد على مجموع عوامله .

ولا شك أن الوقوف على فكرة العدد التام يرجع إلى عهد بعيد حيث إن الهنود كانوا على علم بها قبل الإغريق .

= هذا وقد ورد عن العالم الإغريقي نيكوماخوس Nicomachus (حوالي عام ١٠٠ م) قوله في الأعداد التامة :

«..... فإن الأعداد الزائدة والأعداد الناقصة توجد بكثرة وبغير انتظام أو ترتيب ، ويتم اكتشافها بغير نظام .

ولكن الأعداد التامة يسهل حصرها ، وتقع في ترتيب محدد ، وذلك لوقوع عدد تام واحد منها في الآحاد هو العدد ٦ ، وعدد واحد في العشرات هو ٢٨ ، وعدد واحد في جميع المئات هو ٤٩٦ ، وعدد واحد في المدى الواسع من الآلاف وعلى مشارفها ، فهو قريب من عشرة آلاف ، وهو العدد ٨١٢٨ ، ويتسم انتظام الأعداد التامة بانتهائها بواحد فقط من الرقمين ٦ ، ٨ في خانة الآحاد ، والأعداد التامة تكون دائما أعدادا زوجية . » .

كذلك فقد اهتم اقليدس بالأعداد التامة فخصّها بباب مستقل في مؤلفه «الأصول» .

ويقدم العاملى هنا قاعدة لتعيين الأعداد التامة ، فيشير إلى المتوالية الهندسية التى أساسها ٢ ، وهى ما عبّر عنه فى النصّ بالأعداد المتوالية من الواحد على التضاعف أى المتوالية الهندسية :

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots$ وهكذا بحيث إن كل حدّ فى المتوالية يساوى ضعفَ الحدّ الذى يسبقه .

يقول العاملى بأنه إذا جمعت عدة حدود بدءاً من الواحد ، فكان مجموع هذه الحدود عدداً أولياً ، فإنّ هذا المجموع مضروباً فى العدد الأخير من هذه المجموعة يكون عدداً تاماً .

وطبقاً لهذه القاعدة فالعدد التام الأول هو الواحد .

أما العدد التام الثانى فيحصل عليه - حسب هذه القاعدة - من الحدين الأولين للمتوالية الهندسية التى أساسها ٢

= $1 + 2 = 3$ وهو عدد أولى .

= وبذلك يكون العدد التام الثانى هو $3 \times 2 = 6$ وهذا صحيح .

وبالنسبة للعدد التام الثالث فإنه طبقاً للقاعدة التى نحن بشأنها يتأتى من الحدود الثلاثة الأولى للمتوالية :

$$1 + 2 + 3 = 6 \text{ وهو عدد أولى}$$

فيكون العدد التام الثالث هو $3 \times 6 = 18$ وهذا صحيح أيضاً وهو ما ساقه العاملى تدليلاً على صحة القاعدة الثامنة .

يمكننا باتباع هذه القاعدة أن نحصل على العدد التام الرابع من الحدود الخمسة الأولى للمتوالية ، هكذا :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 \text{ وهو عدد أولى}$$

إذن فالعدد التام الرابع وهو حاصل ضرب مجموع الحدود فى الحد الأخير من هذه المجموعة $16 \times 31 = 496$ وهو عدد تام فعلاً

كذلك فإن العدد التام الخامس يحىء من جمع الحدود السبعة الأولى من المتوالية :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 16 = 36 \text{ وهو عدد أولى}$$

فيكون العدد التام الخامس هو $36 \times 8128 = 292608$ وهو صحيح تماماً

أما العدد التام التالى - وهو ما لم يرد فى أقوال نيكوماخوس - فإنه ينتج - بتطبيق القاعدة التى ذكرها العاملى - من الحدود الثلاثة عشر الأولى من المتوالية :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 + 4096 = 8191$$

وحيث إن هذا المجموع عدد أولى ، فإن العدد التام السادس هو

$$8191 \times 4096 = 33550336$$

وبالمثل فإن العدد التام السابع يمكن الحصول عليه من واقع الحدود السبعة عشر الأولى من المتوالية :

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 + 4096 + 8192 + 16384 + 32768 + 65536 = 131071$$

ولما كان هذا المجموع عددًا أوليًا ، فإنه طبقًا للقاعدة يكون حاصل الضرب :

$$131071 \times 65536 = 8589869056 \text{ عددًا تامًا}$$

فالقاعدة التي أوردتها العامل صحيحة حتى البلايين على الأقل .

ومن الملاحظ أن الأعداد التامة (فيما عدا الواحد) أعداد زوجية ينتهى رقم الآحاد فيها إما بالرقم ٦ ، وإما بالرقم ٨ .

هذا ويُنسب إلى إقليدس أنه قد أثبت في كتابه «الأصول» أن العدد التام يكون على الصورة :

$$2^{n-1} (1 - 2^n)$$

طالما كان المقدار $(1 - 2^n)$ عددًا أوليًا .

وقد أمكن - حتى الآن - الوقوف على ١٢ عددًا تامًا تنشأ من قيم n التالية :

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 61, 107, 127, 257$$

كذلك فقد أمكن باستخدام الحاسبات الالكرونية إضافة خمسة أعداد أخرى .

هذا ونود أن نشير هنا إلى أن قاعدة إيجاد الأعداد التامة التي أشار إليها العامل قد سبقه إليها نيقوماخس الجاراسيني في مؤلفه «كتاب المدخل إلى علم العدد» الذي ترجمه ثابت بن قرة . وعُني بنشره وتصحيحه الأب واهلم كوتش اليسوعي (المطبعة الكاثوليكية ببيروت سنة ١٩٥٨) وفيه يورد نيقوماخس هذه القاعدة في الصفحة ٣٩ من ترجمة ثابت بن قرة كما يلي :

«والوجه فيه على ما أصف ينبغي إذا أردنا ذلك أن نضع أزواج الأزواج المتوالية المبتدئة من الواحد في سطر واحد حتى ينتهى منها حيث ما أردنا ، ثم نجمع تلك الأعداد ونزيدها بعضها على بعض واحدًا واحدًا على تواليها ، وكلما زدنا واحدًا منها نظرنا إلى العدد المجتمع من الأعداد أى عدد هو ، فإن نحن وجدناه من الأعداد الأول =

التي ليست مركبة ضربناه في آخر الأعداد التي جمعت ، فما اجتمع فهو أبدًا عدد تام ، وإن نحن لم نجد العدد الذي كان اجتمع من جمع أزواج الأزواج عددًا أولاً لكن ثانيًا مركبًا لم نضربه في شيء ، لكننا نزيد عليه العدد الذي يتلوا الأعداد التي قد جمعنا من أزواج الأزواج ، ثم ننظر إلى حال العدد الذي اجتمع لنا . فإن وجدناه ثانيًا مركبًا لم نضربه في شيء ، وتجاوزنا ذلك إلى ما بعده ، فإن وجدناه أولاً غير مركب ضربناه في آخر الأعداد التي كنا جمعنا . فما اجتمع فهو أبدًا عدد تام ، وإذا أنت فعلت مثل ذلك دايماً تولدت الأعداد التامة كلها على الولا من غير أن يشذ عنك شيء منها . » .

إذا أردتَ تحصيلَ مَجْدُورٍ يكون نسبته إلى جذره كنسبة عددٍ معيَّنٍ إلى آخر :
فاقسيم الأولَ على الثاني ، فمَجْدُورُ الخارجِ هو العددُ .

مثالها :

مجذورُ نسبته إلى جذره كنسبة الاثنى عشر إلى الأربعة : فالجوابُ - بعدَ قسمةِ
الاثنى عشر على الأربعة - تسعةٌ ، ولو قيل كنسبة الاثنى عشر إلى التسعة ، فالجوابُ
واحدٌ وسبعةٌ أضعافٍ ، لأنَّ جَذْرَهُ واحدٌ وثُلثٌ .

شرح : يمكن التعبير عن القاعدة التاسعة رياضياً على الوجه التالى :

$$\text{إذا كان } \frac{ع}{\sqrt{ع}} = \frac{م}{ن} \cdot \text{فإن } ع = \left(\frac{م}{ن}\right)^2$$

وهذا صحيح . حيث إنه بنزيع طرفي المعادلة (ويُعبر عن التربيع في هذا النص
بالتجذير) نحصل على النتيجة وهي $ع = \left(\frac{م}{ن}\right)^2$.

فى المثال الأول الذى قدمه العاملى لهذه القاعدة نجد أن :

$$9 = 3^2 = ع \cdot \cdot \cdot 3 = \frac{12}{4} = \frac{ع}{\sqrt{ع}}$$

وفى المثال الثانى : $\frac{12}{9} = \frac{1}{3} = \frac{ع}{\sqrt{ع}} \cdot 1 = ع = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1 \frac{7}{9}$

العاشرة :

كل عدد ضرب في آخر ، ثم قسّم عليه ، وضرب الحاصل في الخارج . حصل مساوى مُربّع ذلك العدد .

مثالها :

ضربنا مضروب التسعة في الثلاثة في الخارج من قسمتها عليها^(١) ، حصل واحد^(٢) وثمانون .

(١) في المخطوط ١٧٧٣ : عليه .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : أحد .

شرح : لرمز في القاعدة العاشرة للعددين بالرمزين م ، ن

∴ الحاصل (وهو ما ينتج من ضرب م × ن) = م × ن

والخارج (أى الخارج من قسمة م على ن) = $\frac{م}{ن}$

فبضرب الحاصل في الخارج نحصل على :

$$(م \times ن) \times \frac{م}{ن} \text{ أى مربع العدد الأول م}$$

وصحته واضحة .

أمّا المثال ففيه الحاصل : ٣ × ٩

والخارج : $\frac{٩}{٣}$

وبضرب الحاصل في الخارج . نحصل على ٩^٢ = ٨١ .

الحادية عشرة :

التفاضلُ بين كُلِّ مَرَبَّعَيْنِ يُسَاوِي مَضْرُوبَ جَذْرَيْهِمَا فِي تَفَاضُلِ الْجَذْرَيْنِ

مثالها : التفاضلُ بَيْنَ سِتَّةَ عَشَرَ ، وَسِتَّةَ وَثَلَاثِينَ ، عَشْرُونَ^(١) ، وَجَذْرَا عَشْرَةٍ ، وَتَفَاضُلُهَا اثْنَانِ .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : عشرين .

(٢) في المخطوط ١٧٧٣ : جذرهما .

وفي المخطوط ١٢٥٣ : جذريهما .

شرح : تُمَثَّلُ القاعدةُ الحادية عشرة بالمعادلة :

$$(م^2 - ن^2) = (م + ن) (م - ن)$$

وكلمة التفاضل في التصريح تعني الفرق أو حاصل الطرح .

وتدل هذه القاعدة - وهي صحيحة تمامًا - على وقوف العلماء العرب على فك الأقواس المشتملة على المجهولات .

والمثال الذي أورده العامل لهذه القاعدة هو :

$$م^2 = ٣٦ = ٦^2 ، ن^2 = ١٦ = ٤^2 ،$$

$$\therefore (م^2 - ن^2) = (٦^2 - ٤^2)$$

فمجموع الجذرين هو $(٦ + ٤) = ١٠$

وتفاضل الجذرين هو $(٦ - ٤) = ٢$

وحاصل ضرب الجذرين (أى مجموع الجذرين) في تفاضلها (أى الفرق

هو $١٠ \times ٢ = ٢٠$ وهو نفسه الفرق بين المربعين .

الثانية عشرة :

كلُّ عَدَدَيْنِ قُسِمَ كُلُّ مَنَها عَلَى الْآخِرِ ، وَضُرِبَ أَحَدُ الْخَارِجِينَ فِي الْآخِرِ ،
فَالْحَاصِلُ وَاحِدٌ أَبَدًا .

مثالها : الخارجُ من قسمةِ الاثنى عشر على الثمانية ، واحدٌ ونصفٌ ، وبالعكسِ
ثُلثانٌ ، وَمُسَطَّحُهُمَا واحدٌ .

شرح : في هذه القاعدة الأخيرة يقول العاملى بأن أى كسر يُضرب في مقلوبه فالنتيجة
أبدًا هى الواحد الصحيح .

فبفرض العددين م ، ن ، وبقسمة كل منهما على الآخر نحصل على خارج القسمة
 $\frac{ن}{م}$ ، وبضرب أحد هذين الخارجين فى الآخر
نحصل على $\frac{ن}{م} \times \frac{م}{ن} = ١$ دائمًا وهو أمر واضح كل الوضوح

والمثال المبين فى النص هو : $(\frac{٨}{١٢} \times \frac{١٢}{٨})$ أى $\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{١} = ١$

فحاصل الضرب (أو مُسَطَّح الخارجين كما جاء بالنص) يساوى الواحد الصحيح .

الباب العاشر

في مسائل متفرقة بطرق مختلفة

تشحذ ذهن الطالب وتمرنه في استخراج المطالب .

[١] مسألة

عددٌ ضوعف وزيد عليه واحدٌ . وضُرب الحاصلُ في ثلاثةٍ ، وزيدَ عليه اثنان ،
وضُرب المبلغُ في أربعةٍ . وزيدَ عليه ثلاثةٌ ^(١) . بلغ خمسةٌ وتسعين .

فبالجبرِ عملنا ^(٢) ما يجب . فانتهى إلى أربعةٍ وعشرين شيئًا ، وثلاثةً وعشرين
عددًا . تعدل خمسةٌ وتسعين . وبعد إسقاطِ المشترك ، فالأشياءُ تعدلُ اثنين
وسبعين . وهى الأولى من المفردات . وخارجُ القسمةِ ثلاثةٌ ، وهو المطلوب .

وبالخطأين فرضناه اثنين . فأخطأنا به ^(٣) بأربعةٍ وعشرين ناقصةً ، ثمَّ
خمسَةً . فبثمانيةٍ وأربعين زائدةً . فالمحفوظُ الأول سِتَّة وتسعون ، والثانى مائة
وعشرون . قسمناهما على مجموع الخطأين . خرج ثلاثةٌ ، وبالتحليل نقصنا من
الخمسَةِ والتسعين ثلاثةً ، وسُقنا العملَ إلى أن قَسَمنا أحدًا وعشرين على ثلاثةٍ ،
ونقصنا من السبعةِ واحدًا . ونصَّفنا الباقي .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : بثلاثة

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : علمنا .

(٣) زائدة في المخطوط ١٧٧٣ .

شرح : في هذه المسألة نفرض العدد المجهول س . فنحصل - طبقًا لما ورد بالنص -
على المعادلة :

$$[(٢ + ٣ \times (١ + س)] \times ٤ + ٣ = ٩٥$$

فبالجبر تختصر المعادلة إلى :

$$٢٤ \text{ س} + ٢٣ = ٩٥$$

وبإسقاط المشترك :

$$٢٤ \text{ س} = ٧٢ ، \text{ س} = ٣$$

وهذه المسألة من النوع الأول من المسائل المفردات التي سبق شرحها في الفصل الثاني من الباب الثامن .

أما حل المسألة بطريق الخطأين فيجرى على الوجه التالى :

فبالمفروض الأول $ف_١ = ٢$ ، يكون الخطأ الأول $خ_١ = ٢٤ -$

وبالمفروض الثانى $ف_٢ = ٥$ ، يكون الخطأ الثانى $خ_٢ = ٤٨ +$

∴ المحفوظ الأول = $ف_١ \cdot خ_٢ = ٩٦$

، المحفوظ الثانى = $ف_٢ \cdot خ_١ = ١٢٠ -$

$$\text{ويكون العدد المطلوب} = \frac{١٢٠ + ٩٦}{٢٤ + ٤٨} = \frac{٢١٦}{٧٢} = ٣$$

أما الطريقة الثالثة وهى طريقة التحليل أو العمل بالعكس فهى واضحة لانتاج إلى شرح .

إن قيل اقسام العشرة بقسمتين . يكون الفضل بينهما خمسة ، فبالجبر تفرض الأقل شيئاً ، فالأكبر شيئاً وخمسة ، ومجموعهما شيان وخمسة تعدل عشرة . فالشيء بعد المقابلة اثنان ونصف .

وبالخطأين فرضنا الأقل ثلاثة . فالخطأ الأول واحد ناقص ، ثم أربعة . فالخطأ الثاني ثلاثة ناقصة . والفضل بين المحفوظين خمسة ، وبين الخطأين اثنان . وبالتحليل لما كان الفضل بين قسمي كل عدد ضعف الفضل بين نصفه وبين كل منهما . فإذا أزدت نصف هذا الفضل على النصف يبلغ (١) سبعة ونصفاً ، أو نقصته منه يبقى اثنان ونصف .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : بلغ .

شرح : في هذه المسألة - وهي أيضاً من النوع الأول من المسائل المفردات - يفرض العدد الأصغر س . فيكون العدد الأكبر (س ١ ٥) .

ولما كان مجموع العددين عشرة . حصلنا على المعادلة :

$$\begin{array}{rcl} \text{س ١ (س ١ ٥)} & ١٠ & \text{س ٢ (س ١ ٥)} \\ \text{أى} & ١٠ & \text{س ٢ (س ١ ٥)} \\ \text{وبالمقابلة} & ٥ & \text{وبالتالى} \end{array}$$

$$٢ \frac{١}{٣} = \text{س}$$

وبحساب الخطأين يكون الحل كما يلي :

$$\begin{array}{rcl} \text{نفرض العدد الأصغر ف} & ٣ & \text{الخطأ الأول خ} \\ \text{ثم نفرض العدد الأصغر ف} & ٤ & \text{فيكون الخطأ الثانى خ} \end{array}$$

$$١ -- = ١ \quad ٣ -- = ٣$$

$$\text{المحفوظ الأول ف} \cdot ١ \cdot ٣ \cdot (٣ ٠٠) - ٩$$

$$\text{المحفوظ الثانى ف} \cdot ٢ \cdot ٤ \cdot (١ ٠) - ٤$$

$$\text{بذلك نحصل على العدد الأصغر} \quad \frac{٩}{٣} - \frac{٤}{١} = ٥$$

$$\text{ويكون العدد الأكبر} \quad ٥ + ١ = ٦$$

مالٌ زدنا عليه خُمُسُهُ وخمسةَ دراهم ، ونقصنا من المبلغ ثُلثُهُ وخمسةَ دراهم ،
لم يَبْقَ شيءٌ .

فبالجبر افرض المال شيئاً . [وزد عليه خُمُسَهُ وخمسةَ دراهم ، يصيرُ شيئاً
وخُمُسَ شيءٍ وخمسة دراهم^(١) ثم] انقص من شيءٍ وخُمُسِ شيءٍ وخمسةَ
دراهم^(٢) ثُلثها ، يبقى أربعةُ أخماسِ شيءٍ ، وثلاثةُ دراهم وثُلثٌ ، وإذا نقصت منه
خمسةً لم يبق شيءٌ ، فهو مُعَادِلُ الخُمُسَةِ ، وبعد إسقاطِ المشتركِ أربعةُ أخماسِ (شيءٍ
يعدل درهماً وثُلثين ، فاقسم واحداً وثُلثين على أربعةِ أخماسِ)^(٣) ، يخرجُ اثنان
ونصفٌ سُدُسٍ ، وهو المطلوب .

وبالخطأين فرضناه خمسةً ، فالخطأُ الأوَّلُ اثنان وثُلثٌ زائدٌ ، أو اثنين ،
فالخطأُ الثاني ثُلثٌ خُمُسٍ ناقصٌ ، فالمحفوظُ الأوَّلُ ثُلثٌ ، والثاني أربعةٌ وثلاثان ،
والخارجُ من قسمةِ مجموعهما على مجموع الخطأين - أعني اثنين وثلاثاً وثُلثٌ خُمُسٍ ،
أى اثنان وخُمُسان - اثنان ونصفٌ (و)^(٤) سُدُسٍ ، وبالتحليل خذ الخمسةَ التى
لا يبقى بعد إلقائها شيءٌ^(٥) ، وزد عليها نصفها لأنَّه الثُلثُ المنقوصُ ، ثمَّ انقص من
المجتمع الخمسةَ ، ومن الباقي سُدُسُهُ^(٦) إذ هو خُمُسٌ مَرِيدٌ .

(٤) زائدة في المخطوط ١٧٧٣ وهو تحريف .

(١) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(٥) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(٢) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٦) في المخطوط ٧٥٣ : سدس .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : بفرض المال س يكون المقابل التحليلي للمسألة هو :

$$[س + \frac{1}{5}س + 5] \times \frac{2}{3} - 5 = \text{صفرًا} .$$

$$5 = 3\frac{1}{3}س + \frac{4}{5}$$

=

= وبالمقابلة - أى بإسقاط المشترك من طرفي المعادلة - نحصل على :

$$2 \frac{1}{12} = \frac{25}{12} = \frac{1 \frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \text{س} 1, \frac{2}{3} = \text{س} \frac{4}{5}$$

والحل بطريق «حساب الخطأين» كما يلي :

بالمفروض الأول ف_١ = ٥ يكون الخطأ الأول خ_١ = + ٢ $\frac{1}{3}$

وبالمفروض الثاني ف_٢ = ٢ يصبح الخطأ الثاني خ_٢ = - $\frac{1}{15}$ (أى ثلث خمس ناقص)

فالمحفوظ الأول ف_١ . خ_١ = ٥ × (- $\frac{1}{15}$) = - $\frac{1}{3}$

والمحفوظ الثاني ف_٢ . خ_٢ = ٢ × $2 \frac{1}{3}$ = $4 \frac{2}{3}$

$$\text{فيكون المال} = \frac{4 \frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{2 \frac{1}{3} + \frac{1}{15}} = \frac{5}{2 \frac{2}{5}} = \frac{25}{12} = 2 \frac{1}{12}$$

أما طريق التحليل فهو فى غير حاجة إلى توضيح .

حوضٌ أرسل فيه أربعة أنابيب ، يملأه^(١) أحدها في يومٍ ، والباقي^(٢) بزيادة يومٍ ، ففي كم يمتلئ .

فبالأربعة المتناسبة لاريب أن الأربع تملأ في يومٍ مثلى الحوض ونصف سدسه^(٣) ، فالنسبة بينهما كنسبة الزمان المطلوب إلى الحوض ، فالجهول أحد الوسطين ، فانسب واحداً إلى اثنين ونصف سدس ، بخمسين وخمسة خمس ، إذ المنسوب إليه خمسة وعشرون (و)^(٤) نصف سدس ، والمنسوب اثنا عشر نصف سدس .

وبوجه آخر الأربعة^(٥) تملأ في يومٍ حوضاً هو خمسة وعشرون جزءاً مما به الأول اثنا عشر جزءاً^(٦) ، وامتلاء كل جزء في جزء من اليوم ، فيمتلئ الأول في اثني عشر جزءاً من خمسة وعشرين جزءاً من يوم .

فإن قيل وأطلق أيضاً في أسفله بالوعة تُفرغه في ثمانية أيام ، فلا ريب أن (الأنبوبة الرابعة^(٧)) تملأ حينئذ في يومٍ ثمن حوضٍ ، فالأربع تملأ فيه مثل ذلك الحوض ، وثلاثة وعشرين جزءاً من أربعة وعشرين جزءاً منه ، فنسبة يومٍ واحدٍ إلى ذلك كنسبة الزمان المطلوب إلى الحوض ، فانسب مُسطح الطرفين إلى الوسط بأربعة وعشرين جزءاً من سبعة وأربعين جزءاً^(٧) من يومٍ ، وعلى الوجه الآخر الأربع تملأ في يومٍ حوضاً هو سبعة وأربعون جزءاً مما به ، الأول أربعة وعشرون ، والباقي ظاهر .

(١) الهاء ناقصة في المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

(٢) في المخطوط ٧٥٣ : البواقي .

(٣) في المخطوط ٧٥٣ : سدس .

(٤) زائدة في المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

(٥) في المخطوط ٧٥٣ : الأربع .

(٦) ناقصة في المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

(٧) في المخطوط ١٧٧٣ : البالوعة الواقعة ، وفي المخطوط ١٢٥٣ : البالوعة .

(٨) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : في المسألة الرابعة تكون كمية المياه التي تتدفق من كل أنبوب في اليوم الواحد كما يلي :

$$\text{الأنبوب الأول} = 1 \text{ حوضاً}$$

$$\text{الأنبوب الثاني} = \frac{1}{2} \text{ حوض}$$

$$\text{الأنبوب الثالث} = \frac{1}{3} \text{ حوض}$$

$$\text{الأنبوب الرابع} = \frac{1}{4} \text{ حوض}$$

فتكون الكمية الكلية المتدفقة من الأنابيب الأربع في اليوم الواحد $= \frac{1}{12} \times 2$ حوضاً
فبطريق الأربعة المتناسبة :

$$\frac{\text{الزمن المطلوب}}{1 \text{ حوض}} = \frac{1 \text{ يوم}}{\frac{25}{12} \text{ حوضاً}}$$

فيكون الزمن المطلوب لملء الحوض بإرسال الأنابيب الأربعة فيه في وقت واحد

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2}{25} + \frac{10}{25} = \frac{12}{25} = \frac{1}{\frac{25}{12}} =$$

(أى خُمسين وخمسي خُمس كما جاء بالنص) .

الجزء الثاني من المسألة يُدخل في الاعتبار وجود بالوعة تفرغ كل ما في الحوض في ٨ أيام . وبالتالي يكون تصريف البالوعة $= \frac{1}{8}$ حوض يوميًا . ومعنى ذلك أن الأنبوبة الرابعة بينما تملأ في اليوم الواحد $\frac{1}{4}$ الحوض . فإنه نتيجة تصريف البالوعة ، يكون صافي ملء الأنبوبة الرابعة في اليوم هو $\frac{1}{8}$ حوض فقط .

وإذا أضيف تأثير عمل الأنابيب الثلاثة الأخرى تكون كمية التدفق من الأنابيب الأربع - مع وجود البالوعة - هي :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{23}{24} = 1 \frac{23}{24} \text{ حوضاً}$$

وبالأربعة المتناسبة :

$$\frac{\text{الزمن المطلوب}}{1 \text{ حوض}} = \frac{1 \text{ يوم}}{\frac{23}{24} \text{ حوضاً}}$$

∴ الزمن المطلوب لملء الحوض - مع تفريغ البالوعة - هو $\frac{24}{23}$ من اليوم . كذلك فإن الأنابيب الأربع تملأ في اليوم الواحد - مع وجود البالوعة التي تفرغه بمعدل $\frac{1}{8}$ حوض في اليوم - حوضاً ساعته $\frac{23}{24}$ من ساعة الحوض موضوع المسألة .

سمكةٌ ثلثها في الطّين ، ورُبُعُها في الماء ، والخارجُ^(١) منها ثلاثةُ أشبارٍ . كم أشبارُها .

فبالأربعةِ المتناسبةِ أسقط الكسرين من مخرجهما . يَبْقَى خمسةٌ ، فنسبةُ الاثني عشر إليها كنسبة المجهول إلى الثلاثة ، والخارجُ من قسمةِ مُسَطَّحِ الطرفين على الوسطِ المعلومِ^(٢) سبعةٌ وخُمُسٌ ، وهو المطلوب .

وبالجبر ظاهرٌ لأنَّك تُعَادِلُ شيئاً أُلْقِيَ منه^(٣) ثُلُثُه ورُبُعُه - أعنى رُبْعَ شيءٍ وسدسيه^(٤) - بثلاثة ، ثم تقسمها على الكسر ، يخرج ما مرَّ .

وبالخطأين أظهر لأنَّك تفرضهما^(٥) اثني عشر ، ثم أربعةً وعشرين ، فيكونُ الفضلُ بين المحفوظَيْن ستةً وثلاثين ، وبين الخطأين خمسة ، وبالتحليل تزيد على الثلاثة مثلاً وخُمُسَيْهَا ، لأنَّ الثُلُثَ والرُّبْعَ من كلِّ عددٍ يساوى ما بقى وخُمُسَيْهِ ، وقس على ذلك أمثاله .

تنظُرُ النسبةَ بين الكسور المُلقَاةِ ، وبين ما بقى من المخرجِ المشتركِ ، وتزيد على العدد الذي أعطاه السائلُ بمقتضى تلك النسبة ، وهذا العمل الأخير من خواصِّ هذه الرسالة .

(١) في المخطوط ١٢٥٣ : الباقي .

(٢) في المخطوط ٧٥٣ : المعلومة .

(٣) ناقصة في المخطوط ٧٥٣ .

(٤) وردت في المخطوطات سدسه ، وصحتها سدسيه طبقاً للمعطيات وتفصيلات الحل .

(٥) في المخطوطين ٧٥٣ ، ١٢٥٣ : تفرضها .

شرح : في المسألة الخامسة يقدم العاملى ثلاث طرق للحل :

بالأربعة المتناسبة : يكون المخرج المشترك للكسرين (الثلث والربع) هو ١٢ . =

= وباسقاط الكسرين من محرجهما يبقى خمسة ، أى أنه إذا اعتبر طول السمكة ١٢ يكون مجموع ثلثها وربعها سبعة - فيكون الجزء الخارج من السمكة ٥ ، ولكن القيمة الحقيقية لهذا الجزء هو ثلاثة أشبار .

$$\therefore \frac{\text{طول السمكة}}{١٢} = \frac{٣}{٥}$$

$$\therefore \text{طول السمكة} = \frac{٣ \times ١٢}{٥} = \frac{٣٦}{٥} = ٧ \frac{١}{٥} \text{ شبراً}$$

أمّا بطريق الجبر فيفرض طول السمكة س

$$\therefore \text{س} - \frac{١}{٣} \text{ س} - \frac{١}{٤} \text{ س} = ٣$$

$$\frac{٥}{١٢} \text{ س} = ٣$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٣ \times ١٢}{٥} = \frac{٣٦}{٥} = ٧ \frac{١}{٥} \text{ شبراً}$$

وبطريق الخطأين نفرض طول السمكة مرة ١٢ شبراً ، ومرة ثانية ٢٤ شبراً .
فينشأ عن الفرض الأول خطأ قدره ٢ ، وعن الفرض الثانى ٧ .

$$\text{ويكون المحفوظ الأول} = \text{المفروض الأول} \times \text{الخطأ الثانى} = ١٢ \times ٧ = ٨٤$$

$$\text{والمحفوظ الثانى} = \text{المفروض الثانى} \times \text{الخطأ الأول} = ٢٤ \times ٢ = ٤٨$$

وبذلك يكون طول السمكة = $\frac{\text{الفرق بين المحفوظين}}{\text{الفرق بين الخطأين}}$ (حيث إن الخطأين بنفس

$$\text{الإشارة}) = \frac{٣٦}{٥} = ٧ \frac{١}{٥} \text{ شبراً}$$

رجلان خَصْرًا بَيْعَ دَابَّةٍ ، فقال أحدهما للآخر إن أعطيتني ثلث ما معك على ما معي ، تمّ لي ثمنها ، وقال الآخر إن أعطيتني رُبْعَ ما معك على ما معي ، تمّ لي ثمنها ، فكم مع كلٍّ منهما ، وكم الثمن .

فبالجبر تفرض ما مع الأول شيئاً ، وما مع الثاني ثلاثة لأجل الثلث ، فإن أخذ الأول منها درهماً كان معه شيءٌ ودرهم ، وهو الثمن ، وإن أخذ الثاني ما قاله كان معه ثلاثة دراهم ورُبْعُ شيءٍ ، تغدِلُ شيئاً ودرهماً ، وبعد المقابلة درهماً يعدلان ثلاثة أرباع شيءٍ ، فالشيء درهماً وثلثان ، ومع الثاني الثلاثة المذكورة ، فالثمن ثلاثة دراهم وثلثا درهم ، فإذا صحّحت الكسور كان مع الأول ثمانية ، ومع الثاني تسعة ، والثمن أحد عشر درهماً .

وهذه المسألة سيّالة ، ولا استخراجها وأمثالها طريق سهل ليس من الطُّرق المشهورة ، وهو أن تنقص من مُسطَّحٍ مَخْرَجِي الكسرين واحداً أبداً يبقى ثمن الدّابة ، ثم أحد الكسرين يبقى ما مع أحدهما ، ثم الآخر يبقى ما مع الآخر ، ففي المثال تنقص من اثني عشر واحداً ، ثم أربعة ، ثم ثلاثة ، ليبقى كلٌّ^(١) من المجهولات الثلاث^(٢) .

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) في المخطوط ١٢٥٣ : الثلاثة .

شرح : هذا النوع من المسائل أطلق عليه العرب اسم المسائل السيّالة . أى المسائل التي ليست لها إجابة وحيدة . بل تصح لها عدة أجوبة . ولييان ما نقصد سنرمز لما مع =

= الرجل الأول بالحرف س . ولما مع الرجل الثاني بالحرف ص .

$$\therefore \text{س} + \frac{1}{3} \text{ص} = \frac{1}{4} \text{س} + \text{ص}$$

$$\text{وبالجبر } \frac{3}{4} \text{س} = \frac{2}{3} \text{ص}$$

$$\text{وبتصحيح الكسور ٩ س} = ٨ \text{ص}$$

$$\text{أى أن س} = \frac{٨}{٩}$$

واضح من هذه النتيجة أن الإجابة على المسألة تحدد فقط النسبة بين ما مع الأول إلى ما مع الثاني على أنها ٨ : ٩ . وبالتالي يمكن أن يكون مع الأول ثمانية دراهم . فيلزم أن يكون مع الثاني تسعة دراهم . ولكن من الممكن أيضًا أن يكون مع الأول أى مبلغ طالما أنه سيكون مع الثاني $\frac{٩}{٨}$ هذا المبلغ . وبذلك يكون لمثل هذه المسألة عدد لا نهائى من الحلول . ومن ثم جاءت تسميتها بالسئلة .

ولقد فرض العامل - فى حله - أن ما مع الأول س . وما مع الثاني ثلاثة دراهم (لتقبل القسمة على ثلاثة) . فحصل على المعادلة :

$$\text{س}^2 + ١ = ٣ + \frac{1}{4} \text{س}$$

$$\text{وبالمقابلة : } \frac{3}{4} \text{س} = ٢ \therefore \text{س} = \frac{٨}{3} = \frac{2}{3} \times ٢ \text{ درهمًا}$$

$$\text{ويكون الثمن } ٣ \frac{2}{3} \text{ درهمًا}$$

وبتصحيح الكسور يكون مع الأول ٨ . ومع الثاني ٩ . ويكون الثمن ١١ درهمًا . ومن الواضح أن هذا الحل ما هو إلا حل واحد فقط من العدد غير المحدود من الحلول الممكنة .

ثلاثة أقداح مملوءة ، أحدها بأربعة أرطال عَسَلًا ، والآخر بخمسة خلًا ، والآخر بتسعة ماء . صُبَّتْ في إناء واحد . ومُزجت سَكَنَجِينًا ، ثُمَّ مُلِئت الأقداحُ منه ، فكم في كلٍّ من كلٍّ .

فاجمع الأوزان . واحفظ المجتمع . واضرب ما في كلٍّ قدحٍ من الأوزان الثلاثة في كلٍّ واحدٍ منها ، واقسم الحاصل على المحفوظ . فالخارجُ ما فيه من النوع المضروب فيه ، فتضرب الأربعة في نفسها ، وتقسم كما مرَّ . ففي الرَّباعي ثمانية أُنْسَاع رطلٍ عَسَلًا ، ثُمَّ في الخمسة كذلك . ففيه رطلٌ وُشْعٌ خلًا ، ثُمَّ في التَّسعة كذلك ففيه رطلان ماءً ، والكلُّ أربعة . ثم تضرب الخمسة في نفسها ، والأربعة والتسعة ، وتفعل ما مرَّ . يكن في الخُماسي رطلٌ وثلاثة أُنْسَاع ونصفُ وُشْعٍ خلًا ، ورطلٌ وُشْعٌ عَسَلًا ورطلان ونصفُ ماءً ، والكلُّ خمسة . ثُمَّ تفعلُ ذلك بالتَّسعة . يكن في التَّساعي رطلان عَسَلًا ، ورطلان ونصف خلًا ، وأربعة أرطالٍ ونصف ماءً ، والكلُّ تسعة .

شرح : في هذه المسألة نجد أن مجموع أوزان العسل والخل والماء هو ١٨ رطلاً . وعند صبّها في إناء واحد يتم مزجها وتصبح متجانسة بحيث إنه عند إعادة تفريغها في الأقداح بنفس الأوزان الأصلية . يكون وزن كل من السوائل الثلاث في أي من الأقداح بنسبة ٤ : ٥ : ٩ . ويكون الوزن الفعلي لأي من هذه السوائل بحسب سعة القدح بالنسبة لمجموع الأوزان . وتفصيل ذلك على النحو التالي :

$$\text{نصيب القدح الأول من العسل} = 1 \times \frac{4}{18} = \frac{4}{9} \text{ رطلاً}$$

$$\text{نصيب القدح الأول من الخل} = 5 \times \frac{4}{18} = 1 \frac{1}{9} \text{ رطلاً} \quad 4 \text{ أرطال}$$

$$\text{نصيب القدح الأول من الماء} = 9 \times \frac{4}{18} = 2 \text{ رطلاً}$$

قبل لشخصٍ كم مضى من الليل ، فقال ثلث ما مضى يساوى رُبْعَ ما بقى .
فكم مضى وكم بقى .

فبالجبر افرض الماضى شيئاً ، فالباقي اثنا عشر إلا شيئاً ، فثلث الماضى يعدل ثلاثة
إلا رُبْعَ شَيْءٍ ، وبعد الجبر ثلث الماضى ورُبْعُهُ يعدل ثلاثة ، فالخارجُ من القسمة
خمسة وسُبْعٌ ، وهو السَّاعات الماضية ، والباقية ست وستة أسباع ساعة .

وبالأربعة المتناسبة اجعل الماضى شيئاً ، والباقي أربع ساعاتٍ لأجل الرُّبْعِ .
فثلث الشئ يساوى ساعةً ، فالشئ الماضى ^(١) ثلاث ساعات ، والكل سبعةً ،
فنسبة الثلاثة إلى السبعة كنسبة المجهول إلى اثني عشر ، فاقسم مُسَطَّحَ الطَّرفين على
الوسط ، يخرج خمسة وسُبْعٌ .

$$= \text{وبالمثل نصيب القدر الثاني من العسل} = \frac{5}{18} \times 4 = 1 \frac{1}{9} \text{ رطلاً}$$

$$\text{نصيب القدر الثاني من الخل} = \frac{5}{18} \times 5 = 1 \frac{7}{18} \text{ رطلاً } 5 \text{ أرتال}$$

$$\text{نصيب القدر الثاني من الماء} = \frac{5}{18} \times 9 = 2 \frac{1}{2} \text{ رطلاً}$$

$$\text{كذلك نصيب القدر الثالث من العسل} = \frac{9}{18} \times 4 = 2 \text{ رطلاً}$$

$$\text{نصيب القدر الثالث من الخل} = \frac{9}{18} \times 5 = 2 \frac{1}{2} \text{ رطلاً } 9 \text{ أرتال}$$

$$\text{نصيب القدر الثالث من الماء} = \frac{9}{18} \times 9 = 4 \frac{1}{2} \text{ رطلاً}$$

ومن الواضح أنَّ أوزان المزيج في الأقداح الثلاثة هي ٤ ، ٥ ، ٩ رطلاً على التوالي .

(١) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

شرح المسألة الثامنة : بفرض ما مضى من الليل س . يكون الباقي (١٢ - س) ساعة . وحسب النص يكون :

$$\frac{1}{3} \text{ س} = \frac{1}{4} (١٢ - \text{س}) \quad (\text{ثلث الماضى يعدل ثلاثة إلا ربع شئ})$$

رُمَحٌ مركوزٌ في حوضٍ ، والخارجُ عن الماء منه خمسةٌ أذرعٌ ، قالَ مع ثباتِ
طرفه حتى لآقَى رأسه سطحَ الماء ، فكان البُعدُ بين مطلعِه من الماء ، وموضعِ مُلاقاتِ
رأسِه له ^(١) عشرة أذرعٍ ، كم طول الرُمَح .

فبالجبر تفرض الغائب في الماء شيئاً ، فالرُمَح خمسةٌ وشيءٌ ، ولا ريب أن بُعدَ
المِثْل وتُرْ زاوية ^(٢) قائمةٌ أَحَدُ ضِلْعَيْهَا العشرة الأذرع ، والآخر قدر الغائب منه ،
أعني الشيء ، فربَّع الرُمَح - أعني خمسةً وعشرين ومالاً وعشرة أشياء - مساوٍ

(١) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

(٢) ناقصة في المخطوطين ٧٥٣ - ١٧٧٣ .

وبالجبر : $(\frac{1}{4} + \frac{1}{3})$ س = ٣ (ثلث الماضي وربعه يعدل ثلاثة)

$$\therefore \frac{7}{12} \text{ س} = ٣ \cdot ٣ = \frac{36}{7} = \frac{1}{7} \text{ ساعة}$$

$$\therefore \text{ما مضى من الليل} = \frac{1}{7} \text{ ساعة}$$

$$\text{وما بقي منه} = ٦ \frac{6}{7} \text{ ساعة}$$

هذا وقد أورد العامل حلًّا للمسألة - بطريق الأربعة المتناسبة - بأن فرض ما مضى
من الليل س . وما بقي أربع ساعات (لتقبل القسمة على أربعة)

فحسب هذا الفرض يكون $\frac{1}{3}$ س = ساعة واحدة

ويكون ما مضى من الليل ٣ ساعات

بهذا الأسلوب أوجد العامل النسبة بين ما مضى من الليل إلى ما بقي منه على أنها

٣ : ٤ . فيكون مجموع ساعات الليل - حسب هذا الافتراض - سبع ساعات . ولما

كان مجموع الساعات في الواقع هو اثني عشر . فبالتناسب نحصل على :

$$\frac{\text{ما مضى من الليل}}{\text{طول الليل}} = \frac{3}{7} = \frac{3}{12} \text{ س} \quad (\text{نسبة الثلاثة إلى السبعة})$$

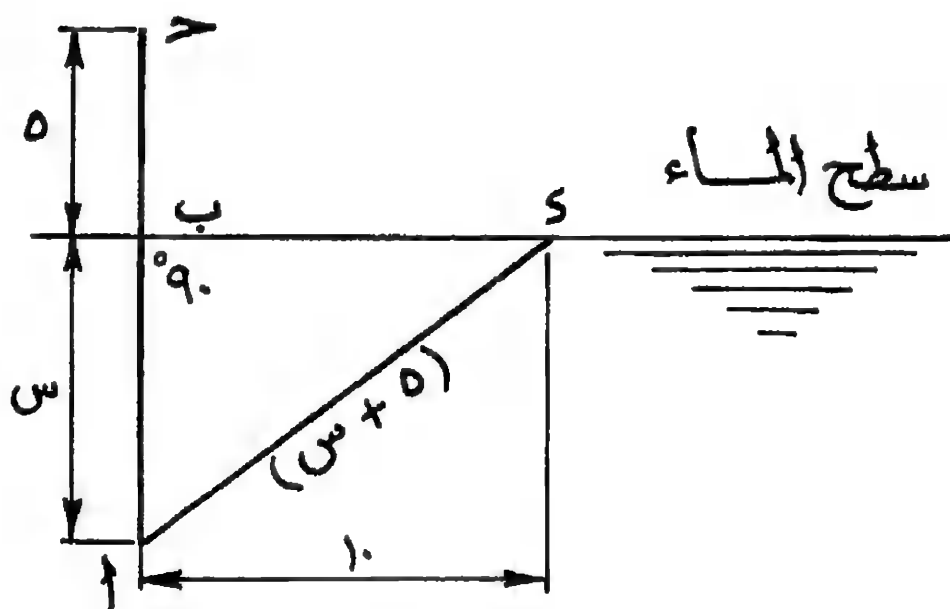
كنسبة المجهول إلى اثني عشر)

$$\therefore ٧ \text{ س} = ٣ \times ١٢ \cdot \text{س} = \frac{36}{7} = \frac{1}{7} \text{ ساعة كما تقدم .}$$

لمربعى العشرة والشيء ، أعنى مائة ومالاً يشكل العرؤس ، وبعد إسقاط المشترك يبقى عشرة أشياء مُعادلةً لخمسة وسبعين ، والخارج من القسمة سبعة ونصف . وهو القدر الغائب في الماء ، فالرمح اثنا عشر ذراعاً ونصفاً .

ولا استخراج هذه المسألة ونظائرها طرق أخرى ، تُطلب مع براهينها من كتابنا الكبير وفقنا الله تعالى لإتمامه .

شرح المسألة التاسعة : نفرض القدر الغائب في الماء والرمح مركوز في الحوض شيئاً أى س فيكون طول الرمح $(س + ٥)$ ذراعاً ويتضح من شكل (١٧) أنه بالنسبة للمثلث القائم الزاوية أ ب د :



شكل (١٧)

مسألة الرمح المركوز في الحوض

$$١٠ + ٢س = (س + ٥)²$$

$$١٠٠ + ٢س = ٢٥ + ٢س + ١٠ + س$$

أشياء تعدل مائة ومالاً

$$٧٥ = \text{وياسقاط المشترك : } ١٠ س$$

$$٧.٥ = \text{ذراعاً القدر الغائب في الماء} \quad \therefore س$$

$$١٢.٥ = ٥ + ٧.٥ = \text{ذراعاً ويكون طول الرمح}$$

خاتمة

قد وقعَ للحكماء الراسخين في هذا الفن مسائلُ صرفوا في حلِّها أفكارهم ، ووجهوا إلى استخراجها أنظارهم ، وتوصلوا إلى كشفِ نِقابها بكلِّ حيلةٍ ، وتوسَّلوا إلى رفعِ حجابها بكلِّ وسيلةٍ ، فما استطاعوا إليها سبيلاً ، وما وجدوا عليها مُرشِداً ودليلاً ، فهي باقيةٌ على عدمِ الانحلالِ من قديمِ الزمان ، مستصعبةٌ على سائر الأذهان ، إلى هذا الآن .

وقد ذكر علماء هذا الفن بعضها في مُصنِّفاتهم ، وأوردوا شطراً منها في مؤلِّفاتهم ، تحقيقاً لاشتغال هذا الفن على المستصعبات الآيات ، وإفحاماً لمن يدَّعى عَدَمَ العجزِ في الحسابيات ، وتحذيراً للمحاسبين من التزام الجواب عما يورد عليهم منها ، وحثاً لأصحابِ الطُّبائعِ الوَقَّادة على حلِّها والكشفِ عنها .

وأنا أوردتُ في هذه الرسالة سَبْعَةً منها على سبيلِ الأنموذج ، اقتداءً بمنارهم ، واقتفاءً لأثارهم . (وهي هذه) ^(١) :

الأولى :

عشرةٌ مقسومةٌ بقسمين ، إذا زيدَ على كُلِّ ^(٢) جذرُهُ ، وضُرِبَ المجتمعُ في المجتمعِ . حصلَ عددٌ مفروضٌ .

(٢) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : يختم بهاء الدين العامل كتابه بذكر سبعة من المسائل التي لم يوجد لها حلٌّ على عصره . وذلك على سبيل المثال . نقدمها بصيغها الرمزية فيما يلي :

لنفرض - في هذه المستصعبة الأولى - أحد قسمي العشرة : س^٢

فيكون القسم الآخر : (١٠ - س^٢)

الثانية :

مجذورٌ إن زِدْنَا عليه عشرةٌ . كان للمجتمع^(١) جذرٌ . أو نقصناها منه . كان للباقي^(٢) جذرٌ .

(١) في المخطوطين ٧٥٣ ، ١٢٥٣ : المجتمع جذرًا .

(٢) في المخطوطين ١٢٥٣ ، ١٧٧٣ : الباقي جذرًا .

= بذلك نحصل - طبقاً لنص المسألة - على المعادلة :

$$(س^٢ + س) (س^٢ - ١٠) + (س^٢ - ١٠) = ح \text{ حيث } ح \text{ العدد المفروض}$$

أى أن : $س^٤ + س^٣ - ١٠س^٢ - ١٠س + ح = (س^٢ + س) (س^٢ - ١٠) + ح$
ومن الواضح أن صعوبة الحل تكمن في أن المعادلة من الدرجة الرابعة .

هذا ومن المعروف أنَّ أبا الوفاء البوزجاني (٩٤٠ - ٩٩٨ م) قد حلَّ - بطريقة هندسية - المعادلة :

$$س^٤ + ب س^٣ = هـ$$

(عن كتاب البوزجاني : « استخراج ضلع المكعب بمال مال وما ترتب منها ») . كما أنه قد تمكَّن من التوصل إلى حلول أخرى تتعلق بالقطع المكافئ .

كذلك فإن مؤلفات عمر الخيامي (١٠٤٨/٣٨ - ١١٢٣ م) تشتمل على معادلة من الدرجة الرابعة هي :

$$٨١٠٠ = (س^٢ - ١٠٠)(س + ١٠)$$

ويضيف الخيامي أن جذر هذه المعادلة ما هو إلا نقطة تقاطع الخطين البيانيين :

$$س^٢ + ص = ١٠٠ \quad (\text{ويمثل دائرة نصف قطرها } ١٠)$$

$$٩٠ = ص (س + ١٠) \quad (\text{ويمثل قطعاً زائداً})$$

وهو حل المعادلة الأصلية : $س^٤ + ٢٠س^٣ - ٢٠٠٠س = ١٩٠٠$

شرح المستصعبة الثانية : سرمرز للمجذور (أى الذى يمكن جذره ، بمعنى أن يكون له جذر صحيح) بالرمز $س^٢$ ، فنحصل - حسب المتن - على المعادلتين :

الثالثة :

أَقْرَ لزيدٍ بعشرةٍ إِلَّا جَذَرَ ما لعمرو . ولعمرو بخمسةٍ إِلَّا جَذَرَ ما لزيدٍ .

$$= \frac{س^2 + ١٠ = ن^2}{}$$

$$س^2 - ١٠ = ن^2$$

حيث $ن$ ، $س$ أعداد صحيحة ، هما جذرا المُجمِّع من زيادة العشرة أو نقصانها من الجذور $س^2$ على التوالى ، $س$ عدد صحيح أيضًا .

ويجمع المعادلتين نصل إلى النتيجة الآتية :

$$٢س^2 = ن^2 + ن^2$$

أى أنه من المحال تقسيم ضعف المربع إلى مربعين ، وهو ما جاء فيما بعد فى نظرية نُسبَت للعالم الرياضى الفرنسى « فيرما » ، وسنتناول هذه النظرية بتفصيل أكثر عند الحديث عن المستصعبة الرابعة .

شرح المستصعبة الثالثة : نفرض أن ما مع عمرو $س^2$

(وذلك حتى يكون جذره $س$)

$$\therefore \text{ما أَقْرَ لزيد} = (١٠ - س)$$

$$\text{ويكون ما لعمرو} = ٥ - \sqrt{١٠ - س}$$

وبذلك نحصل على المعادلة :

$$\text{ما مع عمرو} = س^2 = ٥ - \sqrt{١٠ - س}$$

$$\text{أى أن } ٥ - \sqrt{١٠ - س} = س^2$$

وبربع طرفى المعادلة :

$$١٠ - س = ٢٥ - ١٠س + س^4$$

$$\therefore س^4 - ١٠س + ١٥ = صفرًا$$

فهذه المستصعبة تؤدي إلى معادلة من الدرجة الرابعة ، ومن هنا جاءت الصعوبة فى حلها .

عَدَدُ مُكْعَبٌ قُسِمَ بِقُسْمَيْنِ مُكْعَبَيْنِ .

شرح : هذه المستصعبة الرابعة هي في الواقع أساس ما عُرف فيما بعد بمسألة أونظرية « فيرما » نسبةً إلى الرياضى الفرنسى « بيير دى فيرما » (Pierre de Fermat) الذى عاش فى الفترة من سنة ١٦٠١ حتى سنة ١٦٦٥ م . ولقد وقعت فى يد فيرما نسخة من طبعة جديدة لكتاب الحساب (Arithmetica) الذى ألفه العالم ديوفانتس السكندرى (Diophantus) الذى نبغ حوالى عام ٢٥٠ م ، فعَلَّقَ فيرما على هامش إحدى صفحات هذه النسخة ، وذلك حوالى عام ١٦٣٧ م . فكتب عبارته الهامشية الشهيرة التى عرفت بنظرية فيرما :

« من المحال تقسيم المكعب إلى مكعبين . أو ضعف المُرَبَّع إلى مربعين . أو بوجه عام تقسيم أية قوة (يقصد أُسّ) أعلى من المُرَبَّع إلى قوتين من نفس الدرجة .
ولقد اكتشفتُ برهانًا جديرًا حقًا بالاعتبار . يَبْدُو أَنَّ هذا الهامش البالغ الصغر لا يتسع لاحتوائه . »

والصورة العامة لهذه المسألة المستحيلة الحل - كما نُعَبِّرُ عنها برموزنا الرياضية المعاصرة - هي :

تكون المعادلة : $S^n + S^n = E^n$ مستحيلة الحل طالما أن S ، V ، E أعداد صحيحة ، وأن n عدد صحيح أكبر من العدد ٢ .

ولقد أثبت فيرما هذه النظرية لقيمة $n = ٤$ ، إلا أنَّ البرهان العام لعباراته الهامشية لم يتم الكشف عنه إلى يومنا هذا .

وجدير بالذكر أن هذه المسألة المستعصية قد ذاع صيتها . ورصدت جائزة ضخمة لمن يأتى بحل لها ، وقد بذل كثير من الرياضيين الغربيين جهودًا ضخمة لإيجاد برهان عام لهذه النظرية سواء بالإثبات أو بالنفي ولكن دون جدوى .

ومن الواضح أنَّ ملاحظة فيرما الخاصة باستحالة تقسيم المكعب إلى مكعبين قد جاءت بعد انتهاء بهاء الدين العاملى من كتابة مؤلفه « خلاصة الحساب » ، بل إن هذه الملاحظة الهامشية لفيرما قد جاءت بعد وفاة العاملى بحوالى خمسة عشر عامًا ، وبالتالى =

الخامسة :

عَشْرَةٌ مَقْسُومَةٌ بِقِسْمَيْنِ ، إِذَا قَسَمْنَا كُلًّا مِنْهَا عَلَى الْآخَرِ ، وَجَمَعْنَا الْخَارِجَيْنِ .
كَانَ الْمَجْمُوعُ مُسَاوِيًّا لِأَحَدٍ قِسْمِي الْعَشْرَةِ .

فَسَبَقُ الْعَرَبِ فِي هَذَا الْمَوْضُوعِ ثَابِتٌ بَيِّنٌ .

كذلك فإن ملاحظة فيما باستحالة تقسيم ضِعْفِ المُرَبَّعِ إلى مُرَبَّعَيْنِ ، هِيَ نَفْسُهَا
المستصعبة الثانية التي تقدم ذكرها في هذه الخاتمة ، كذا في المستصعبة السابعة .
ولا جدال في سبق العرب إلى هذه الاستحالة .

* * *

شرح المستصعبة الخامسة : نفرض أحد قسمي العشرة س

فيكون القسم الآخر من العشرة (١٠ - س)

وطبقاً لمنطوق المسألة نحصل على المعادلة :

$$\frac{س}{س - ١٠} + \frac{س - ١٠}{س} = س \text{ أو } (س - ١٠)$$

$$س = \frac{س^2 + (س - ١٠)^2}{س(س - ١٠)} \text{ أو } (س - ١٠)$$

$$س^2 = س^2 + (س - ١٠)^2 \text{ أو } (س - ١٠)$$

$$(١) \quad \text{أى أن } س^3 - ٨س^2 - ٢٠س + ١٠٠ = \text{صفرًا}$$

وإن كان التساوى مع القسم الآخر من العشرة تكون المعادلة هي :

$$س^2 = س^2 + (س - ١٠)^2$$

$$(٢) \quad \text{أى أن } س^3 - ٢٢س^2 + ١٢٠س - ١٠٠ = \text{صفرًا}$$

ومن الواضح أنَّ المسألة تتحول إلى معادلة من الدرجة الثالثة - إمَّا المعادلة (١)
أو المعادلة (٢) - ومن هنا كان الاستصعاب في حلها .

ولقد كانت هناك محاولات من جانب العلماء العرب لحل معادلة الدرجة الثالثة
التي يعبر عنها بالمعادلة العامة :

$$= أ س^3 + ب س^2 + ج س + د = \text{صفرًا}$$

= وذلك بالطرق الهندسية - لا الجبرية - بواسطة قطوع المخروط ، ومن أمثال الرياضيين العرب الذين ساهموا في مثل هذه الحلول أبو عبد الله محمد عيسى الماهاني (توفي سنة ٨٧٤ م) ، وثابت بن قرة الحراني (توفي عام ٩٠١ م) ، وأبو جعفر الخازن الخراساني (توفي حوالي سنة ٩٧١ م) ، والحسن بن الهيثم (توفي عام ١٠٣٩ م) . وعمر الخيامي (توفي بين سنتي ١١٢٣ م ، ١١٣٢ م) .

فُيُنَسَّبُ إلى أبي عبد الله محمد عيسى الماهاني معادلة الدرجة الثالثة :

$$س^٣ + د^٢ ه = ب س^٢$$

وقد عالجها بطريق قطوع المخروط فعُرفت باسمه . وهو الذي تصدَّى لمسألة قطع الكرة بمستوى يقسمها بحيث تكون النسبة بين حجمي جزأها نسبةً معيّنة .

كذلك سعى علماء العرب لحل المسألة التي تقول :

« كيف نجد ضلع مُسَبَّعٍ منتظمٍ على أن يكون إنشاء الضلع من المعادلة :

$$س^٣ - س^٢ - ٢س + ١ = صفرًا . »$$

وقد تمكَّن أبو الجود محمد بن الليث (المتوفى سنة ٤٠٠ هـ = ١٠٠٩ م) من التوصل إلى حل لها بواسطة قطوع المخروط ، وإليه يُنسب كتاب في بيان كيفية رسم المضلعات المنتظمة : « المُسَبَّع والمُتَسَّع » .

أمَّا غياث الدين أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيامي فقد تضمَّنت مؤلفاته حلولاً - بطرقٍ هندسيةٍ - لعدَّة صورٍ من معادلة الدرجة الثالثة نوجزها فيما يلي :

$$(١) \text{ المعادلة : } س^٣ + ج^٢ س = ج^٢ د$$

وجذرها - حسب قول الخيامي - ينتج من تقاطع الخطين البيانيين :

$$س^٢ = ج ص$$

$$ص^٢ = س(د - س)$$

$$(٢) \text{ المعادلة : } س^٣ + ب س^٢ = د^٢$$

(حيث ب ، د أعداد صحيحة موجبة)

ويشير عمر الخيامي إلى أن جذر هذه المعادلة

= هو قيمة الإحداثي السيني لنقطة تقاطع الخطين البيانيين :

السادسة :

ثلاثة مربعات متناسبة مجموعها مربع .

$$- \text{س}^2 \text{ص} = \text{د}^2$$

$$\text{ص}^2 = \text{د} (\text{س} + \text{ب})$$

$$(3) \text{ المعادلة : } \text{س}^2 + \text{ب}^2 \text{س}^2 + \text{ج}^2 \text{س}^2 = \text{ج}^2 \text{د}$$

(حيث ب . د أعداد صحيحة موجبة)

وهذه أهم صور معادلة الدرجة الثالثة التي تعرض لها الخيامي . ويعطى جذراً لها قيمة س لنقطة تقاطع الخطين البيانيين :

$$\text{ص}^2 = (\text{س} + \text{ب})(\text{د} - \text{س})$$

$$\text{س} (\text{ح} \pm \text{ص}) = \text{ح} \text{د}$$

هذا هو موقف علماء العرب من معادلة الدرجة الثالثة حتى صدر القرن الثاني عشر للميلاد . ومنه يتبين أن العرب قد نجحوا في حل صور كثيرة لها بطرق هندسية . قبل أن يبدأ ظهور الحلول الجبرية لها في القرن الخامس عشر للميلاد .

* * *

شرح المستصعبة السادسة : نفرض أن المربعات الثلاث هي س^2 - ص^2 - ع^2 حيث س - ص - ع أعداد صحيحة .

فالمستصعبة السادسة هي :

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = \text{ن}^2 \quad \text{حيث ن عدد صحيح}$$

وإذا كانت المربعات س^2 - ص^2 - ع^2 متناسبة ومساوية للتناسب بين أ . ب . ج - حيث أ . ب - ج أعداد صحيحة . فإن المعادلة تتحول إلى الصورة :

$$\text{س}^2 = \text{ن}^2 \frac{(\text{أ} + \text{ب} + \text{ج})}{\text{أ}}$$

ولإمكان حل هذه المعادلة (على أن يكون كل من أ ، ب ، ج ، س ،

ن عدداً صحيحاً) ، يُشترط أن يكون $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{ج}}{\text{أ}}$ مربعاً ، وفي هذه الحالة

فهناك حلول خاصة لهذه المعادلة . مثال ذلك أن تكون النسبة أ : ب : ج مساوية لـ ١ : ٣ : ١٢ حيث إن $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{ج}}{\text{أ}} = ١٦ = ٤^2$

مجذور^(١) إذا زيدَ عليه جذرُه^(٢) ودرهمان - أو نُقِصَ منه جذرُه ودرهمان ، كان للمجتمع^(٣) أو الباقي جذر^(٤) .

(١) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .
(٢) في المخطوطين ٧٥٣ . ١٢٥٣ : المجتمع .
(٣) في المخطوط ١٢٥٣ : جذر .
(٤) في المخطوطين ٧٥٣ . ١٢٥٣ : جذراً .

= أمّا إذا قُصِدَ بالمربعات المتناسبة تلك التي تُكُونُ أضلاعها مثلثاً قائم الزاوية . فإن المستصعبة تتخذ صورة أخرى هي :

$$ن^2 = س^2 + ص^2 + ع^2 \text{ مثلاً}$$

(إذا كانت س وتر المثلث القائم الزاوية ذى الضلعين ص . ع)

$$\text{أى أن } ٢س^2 = ن^2$$

وحيث إن العدد ٢ ليس عدداً مربعاً . فلذلك يستحيل حل المعادلة بأعداد صحيحة لكل من س . ن .

* * *

شرح المستصعبة السابعة : نفرض المجذور (أى الذى يمكن إيجاد جذر صحيح له) س^٢ (حيث س عدد صحيح)

وبالتالى يمكن التعبير عن المستصعبة بالمعادلتين :

$$ن_١^2 = ٢ + س + س^2$$

$$ن_٢^2 = ٢ - س - س^2$$

حيث ن_١ - ن_٢ عددان صحيحان هما جذرا المجتمع فى حالتى الإضافة والنقصان على التوالى .

وبجمع المعادلتين نحصل على المستصعبة :

$$٢س^2 = ن_١^2 + ن_٢^2$$

أى أنه - طبقاً لكلام العامل فى هذا المخطوط - يستحيل تقسيم ضعف المربع إلى مربعين . وهو نفس ما جاء بالمستصعبة الثانية . وهو سبق على ما ورد فى الملاحظة الهامشية للعالم الرياضى الفرنسى فيرما . كما تقدم بيانه فى المستصعبتين الثانية والرابعة .

هذا^(١) واعلم أيها الأخ العزيز الطالب لنفايس المطالب أنني قد أوردت لك في هذه الرسالة الوجيزة ، بل الجوهرة^(٢) العزيزة ، من نفايس عرايس قوانين الحساب . ما لم يجتمع إلى الآن في رسالة ولا^(٣) كتاب ، فاعرف قدرها . ولا^(٤) ترخص مهرها . وامتعها عمّن^(٥) ليس هو^(٦) أهلها . ولا تزفها إلا^(٧) إلى^(٨) حريص ، على أن يكون بعلها ، ولا تبذلها لكثيف الطبع من الطلاب ، لئلا تكون مُعلّقاً للدرّة في أعناق الكلاب ، فإن كثيراً^(٩) من مطالبيها حريّ بالصيانة والكتمان . حقيق بالاستتار عن أكثر أهل هذا^(١٠) الزمان . فاحفظ وصيتي إليك . والله حفيظ^(١١) عليك .

[وينتهي المخطوط ١٢٥٣ بالعبارة التالية]

« تمت الرسالة بعون الله الملك الغفران في سنة تسعين وألف في محرم الحرام »

[ويختتم المخطوط ١٧٧٣ الكتاب بالعبارة :]

« تمت الرسالة اللطيفة بتوفيقات الأزلية الشريفة . وصلى الله على سيدنا محمد

وعلى صحبته وسلم » .

[أما المخطوط ٧٥٣ فيستطرد بالتذنب التالي] .

(١) ناقصة في المخطوطين ٧٥٣ - ١٢٥٣ .

(٢) في المخطوط ١٧٧٣ : الجواهر .

(٣) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

(٤) ناقصة في المخطوط ١٢٥٣ .

(٥) في المخطوط ١٧٧٣ : لمن .

(٦) ناقصة في المخطوطين ٧٥٣ - ١٢٥٣ .

(٧) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

(٨) في المخطوط ١٢٥٣ : على .

(٩) في المخطوط ١٢٥٣ : أكثر .

(١٠) ناقصة في المخطوط ١٧٧٣ .

(١١) في المخطوط ١٧٧٣ : حافظ .

تذنيب*

ومن أهم ما ينبغي أن يقتضى في هذا الفن ما عُرفَ بين الناس بقسمة العُرماء .
وهي قسمة مالٍ غير وافٍ بحقوقٍ متفاوتةٍ على حسب التفاوتِ . ويُسمى المالُ
بالموجودِ . ومجموعُ الحقوقِ بالديونِ .

فإن كان للموجودِ نسبةٌ من النِّسبِ المنطَقةِ إلى الديونِ . فإن كان جزءًا مفردًا
أو مُضافًا ، فاقسيم كلِّ حقٍّ على المخرجِ ، فما خرجَ فهو ما يستحقُّه من الموجودِ .
وإن كان جزءًا مكرَّرًا فاضربه في عدَّةِ أمثالِ الجزءِ . فالحاصلُ هو المستحقُّ ،
أو مَعطوفًا . فحصل مجموعُ المعطوفين من المشتركِ . فاضرب الخارجَ في المجموعِ .
مثالُه : رجلٌ مديونٌ من زيدٍ بدينارين . ومن عمروٍ بخمسةٍ . ومن بكرٍ بثمانيةٍ ،
ومن خالدٍ بخمسة عشر . والموجودُ عشرةٌ . وهي ثلثُ الديونِ .

فتقسم أحدَ حقِّ كلِّ أحدٍ على الثلاثة . فما خرجَ فهو له من العشرةِ . فلزيدٌ ثلثا
دينار . ولعمرو دينارٌ وثلثاه . ولبكرٍ ديناران وثلثان . ولخالدٍ خمسةٌ دنانير . أو أربعة
وهي ثلثا خمسٍ من ثلثين . فتقسم كلَّ دينٍ على خمسة عشر . وتضرب كلَّ خارجٍ
في الاثنين ، وهو عدَّةُ أمثالِ الجزءِ ، فما حصل فهو ما يستحقُّه من الأربعة ، فلزيدٌ
خمس دينارٍ وثلث خمسِهِ . ولعمرو ثلثا دينارٍ ، ولبكرٍ دينارٌ وثلثُ خمسِهِ ، ولخالدٍ
ديناران ، فاندرج فيه القسمان مثالاً .

هذا التذنيب لا يشتمل عليه المخطوط ١٧٧٣ . أمَّا المخطوط ١٢٥٣ في المكتبة
الأحمدية بحلب فيوردُ - مكانَ التذنيب - «قاعدة في بيان تقسيم العُرماء» ، نقدمها
بلفظها بعد تذنيب المخطوط ٧٥٣ عليه .

شرح : في هذا التذنيب يبين العاملُ كيفية تقسيم مالٍ موجودٍ على مجموعةٍ من
المستحقين ، تزيد استحقاقاتهم أوديونهم على المالِ الموجودِ ، وقد بيَّن العاملُ أنه في
مثل هذه الحالة فإن نصيب كل مستحق يساوى دينه مضروبًا في النسبة بين المالِ
الموجود ومجموع الديون أو المستحقات .

ولو كان الموجود أحدا وعشرين ديناراً ، وهو نصفٌ وخُمْسٌ من ثلاثين ، فتقسم كلَّ دينٍ على العشرة . وتضرب الخارجَ في السبعة ، إذ هي مجموعُ الكسرين من العشرة . فما حصل فهو المطلوب .

فلزيد دينارٌ وخُمسان . ولعمرو ثلاثةُ دنانير ونصف . ولبكر خمسةُ دنانير وثلاثةُ أخماس دينارٍ ، ولخالد عشرةُ دنانير ونصف .

وإن لم يكن بينهما ^(١) نسبة . كذلك فإن توافقاً فاضرب وفقَّ الموجود في كلِّ دينٍ ، واقسم الحاصلَ على وفق الديون ، فما خرج فهو المطلوب

مثاله : مالٌ بين الجماعة المذكورة ، لزيد تسعون ديناراً . ولعمرو مائة ، ولبكر مائة وخمسون ، ولخالد مائة وستون ، فالمجموعُ خَمْسُمِائَةٍ ، وقد سُرقَ منه مائتان وعشرون ديناراً ، فالموجود مائتان وثمانون ، وبين الديون والموجود

(١) أى بين الموجود ومجموع الديون .

في المثال الأول مجموع الديون = ٣٠

بينما المال الموجود = ١٠

وبالتالى يأخذ كل من الدائنين $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ دينه

فيكون المال الموجود قد قُسم على الدائنين بنفس النسبة بين ديونهم ، فيستحق لزيد $\frac{2}{3}$ دينار . ولعمرو $\frac{5}{3} = \frac{2}{3} \times 1$ دينار ، ولبكر $\frac{8}{3} = \frac{2}{3} \times 2$ دينار ، ولخالد $\frac{15}{3} = 5$ دنانير .

أما إن كان المال الموجود ٤ دنانير . فإن كل واحد من الدائنين يستحق من دينه على النسبة $\frac{4}{30}$ أى $\frac{2}{15}$ (ثلثاخُمس)

فتكون الاستحقاقات على التوالى : $\frac{4}{15} = (\frac{1}{5} + \frac{3}{15})$ أى خُمس دينار وثلث خُمسه ($\frac{2}{3} \times 1$ دينار وثلث خُمسه) ، ودیناران .

وإن كان المال الموجود ٢١ ديناراً (وهو $\frac{7}{10}$ من مجموع الديون أى $(\frac{2}{3} + \frac{5}{10})$ من الديون ، أى نصفٌ وخُمْسٌ من ثلاثين) ، فتضرب دين كلٍّ في النسبة $\frac{7}{30}$ تحصل على نصيبه من المال الموجود ، فتكون الأنصبة على التوالى : $\frac{2}{5} \times 1$ ، $\frac{1}{2} \times 3$ ، $\frac{3}{5} \times 5$ ، $\frac{1}{2} \times 10$ ديناراً .

توافقٌ بالخُمُسِ ، وبالعُشرِ ونصفِ العُشرِ والأقلِّ أمثُلُ . فتضربَ نصفَ العُشرِ من الموجود وهو أربعة عشر في تسعين . وتقسمُ السَّتين والمائتين والألفَ ، على نصفِ العُشرِ من الدُّيون . وهو خمسةٌ وعشرون ، يخرجُ خمسون ، ويبقى عشرةٌ وهى خُمسان (١) .

فلزيدٍ من الموجودِ خمسون دينارًا وخُمُسه . وعلى هذا القياس في الثلاثة الباقين . فلعمرُو سِتَّةٌ وخمسون ، ولبكرٍ أربعةٌ وثمانون . وخالِدٌ تسعةٌ وثمانون دينارًا وثلاثةٌ أخماسِه .

وهذا الطريق يجرى في الأوَّل أيضًا ، فى الصُّورة الأولى من المثالِ تضرب كلَّ دينٍ في خُمسِ العشرة ، وتقسمُ الحاصلَ على خُمسِ الثلاثين . وقس عليه الصُّورَ الباقيةَ ، وإن تباينَا فاضرب أصلَ كلِّ دينٍ فى الموجودِ ، واقسم الحاصلَ على الدُّيونِ .

(١) بالنسبة إلى الخمسة والعشرين .

• شرح : يبين العاملُ الحالة التى يكون فيها بين الديون والمال الموجود توافق . أى أن يكون لهما عامل مشترك . فى المثال مجموع الديون ٥٠٠ بينما المال الموجود (المتبقى بعد السرقة) هو ٢٨٠ ، والعددان ٥٠٠ ، ٢٨٠ كلُّ منهما يقبل القسمة على ٢٠ ، فيكون بينهما توافق بنصفِ العشرِ .

$$\frac{14}{25} = \frac{280}{500} = \frac{\text{المال الموجود}}{\text{مجموع الديون}}$$

ولإيجاد نصيب كلٍّ من المال الموجود ، نضرب الدين في ١٤ ونقسم الحاصل على ٢٥

$$\text{دينارًا} \quad 50 \times \frac{14}{25} = \frac{14 \times 90}{25} = \text{فيكون نصيب زيد}$$

$$\text{دينارًا} \quad 56 = \frac{14 \times 100}{25} = \text{ونصيب عمرو}$$

$$\text{دينارًا} \quad 84 = \frac{14 \times 150}{25} = \text{ونصيب بكر}$$

$$\text{دينارًا} \quad 89 \frac{3}{5} = \frac{14 \times 160}{25} = \text{ونصيب خالد}$$

ويجمع هذه الأنصبة نحصل على المال الموجود .

مثاله : رأس مال بين الجماعة ، لزيد ألف وخمسون درهمًا ، ولعمرو تسعمائة وستة عشر ، ولبكر أربعمائة وثلاثون ، ولخالد ثلاثمائة وسبعون ، فالجموع ستة وستون وسبعمائة وألف درهم ، وقد حصل منه نماء ، وهو خمسون وثلاثمائة دينار ، فتضرب الخمسين والألف في خمسين وثلاثمائة ، وتقسم على ستة وستين وسبعمائة وألفين ، يخرج اثنان وثلاثون ومائة ، ويبقى ثمانية وثمانون وثلاثمائة وألفان ، وهو كسر مكرّر ، مخرج المقسوم عليه .

فلزيد من النماء اثنان وثلاثون ومائة دينار ، وثمانية وثمانون وثلاثمائة ألفا جزء ، من ستة وستين وسبعمائة وألفا جزء من دينار ، وعلى هذا القياس في الباقيين ، وهو يرجع إلى الأول ، ويعم الكل .

وهذان الأخيران هما المشهوران في المذونات الفرائضية ، وربما كان لكل دين أو لبعضها نسبة معلومة إلى الديون ، فلك أن تقسم الموجود على مخرج النسبة ، فالخارج هو المطلوب .

شرح : في المثال الثالث جماعة مكونة من زيد وعمرو وبكر وخالد لهم من رأس المال ١٠٥٠ ، ٩١٦ ، ٤٣٠ ، ٣٧٠ درهماً على التوالي ، فيكون رأس مال الجماعة ٢٧٦٦ درهماً ، وقد زاد هذا المال بالتنمية مبلغاً قدره ٣٥٠ ديناراً .

$$\text{فيكون نصيب زيد من النماء} = \frac{١٠٥٠}{٢٧٦٦} \times ٣٥٠ = \frac{٢٣٨٨}{٢٧٦٦} \times ١٣٢ \text{ ديناراً}$$

وعلى نفس القياس يُعَيَّن نصيب الباقيين .

مثاله : أوصى للجماعة ثلاثمائة دينار ، لزيد مائة ، وهى ثلث ، ولعمرو مائة وخمسون ، وهو نصف ، ولبكر ثلاثون ، وهو عُشر ، ولخالد عشرون ، وهو ثلث الخمس ، ولم تنفذ . وثُلثُ الثَّركَةِ تسع وخمسون ومائتا دينار ، فاقسمه على الثلاثة ، يخرجُ سبعة وثمانون ديناراً وثُلثٌ وهو لزيد ، وعلى الاثنين يخرجُ تسعة وعشرون ومائة دينار ونصف وهو لعمرو ، وعلى العشرة يخرجُ خمسة وعشرون ديناراً ، وتسعة أعشار وهو لبكر ، وعلى الخمسة عشر يخرجُ سبعة عشر ديناراً وخمُسٌ وثُلثٌ خُمسٍ دينار وهو لخالد .

شرح : فى المثال الرابع إن كان مجموع المال الموصى به ٣٠٠ دينار ، فنصيب زيد ١٠٠ ويعادل $\frac{1}{3}$ المال ، ونصيب عمرو ١٥٠ ويقابل $\frac{1}{2}$ المال ، ونصيب بكر ٣٠ ويساوى $\frac{1}{10}$ المال ، ونصيب خالد ٢٠ ويعادل $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$ المال ، إلا أن هذه الوصية لم تنفذ . وأصاب الجماعة ثلث العركة فقط حيث العركة تساوى ٢٥٩ ديناراً (بدلاً من أصل الوصية البالغ ٣٠٠ ديناراً) .

$$\text{..} \quad \text{نصيب زيد} \quad = \quad 259 \times \frac{1}{3} = \quad 86 \frac{1}{3} = \quad \text{ديناراً}$$

$$\text{ونصيب عمرو} \quad = \quad 259 \times \frac{1}{2} = \quad 129 \frac{1}{2} = \quad \text{ديناراً}$$

$$\text{ونصيب بكر} \quad = \quad 259 \times \frac{1}{10} = \quad 25 \frac{9}{10} = \quad \text{ديناراً}$$

$$\text{ونصيب خالد} \quad = \quad 259 \times \frac{1}{15} = \quad 17 \frac{4}{15} = \quad \text{ديناراً}$$

$$(\text{أى } 17 + \frac{3}{15} + \frac{1}{3} \times 5 : \text{سبعة عشر ديناراً ، وخُمُسٌ ، وثُلثُ خُمسٍ دينار})$$

$$\text{أمّا إن كان ما أوصى به لزيد هو ٩٠ ديناراً } (= \frac{3}{10} \text{ الوصية})$$

$$\text{وما أوصى به لبكر هو ٤٠ ديناراً } (= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \text{ الوصية})$$

$$\text{فإنَّ نصيب زيد} = 259 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{10} \times 259 = 3 \times 25$$

$$= \quad 77 \frac{7}{10} \text{ ديناراً}$$

وإن تكرر كسر فاضرب الخارج في عدّة المكرر ليحصل المطلوب ، كما إذا أوصى في المثال لزيد بتسعين وهو ثلاثة أعشار ، ولبكر بأربعين وهو ثلثا خُمس ، فتضرب خمسة وعشرين وتسعة أعشار في الثلاثة ، يحصل سبعة وسبعون دينارًا وسبعة أعشار دينار ، وتضرب سبعة عشر وخُمسًا وثلث خُمس في الاثنين ، يحصل أربعة وثلاثون وثلث وخُمس .

وبما مرّ من القواعد يسهل الأمر في المعطوف ، وهذا الأخير يُعمّ الثلاثة ، وهو الأوّل ممّا تفرّد به الرسالة ، وللديوانيين من أهل الرّقوم طريق آخر يزيدون على سطر الموجود .

الْمِنَّةُ لِلّٰهِ تَعَالٰى وَتَقَدَّسَ .

انتهى المخطوط

$$\text{ونصيب بكر} = \frac{2}{15} \times 259 = 17 \frac{4}{15} = 2 \times 17 \frac{4}{15}$$

$$= 34 \frac{8}{15} = 34 \left(\frac{3}{15} + \frac{5}{15} + 34 \right) \text{ ديناراً}$$

(أى أربعة وثلاثون وثلث وخُمس . كما جاء في النص)

قاعدة في بيان تقسيم الغرماء^(١)

تضرب دين كل واحد من الغرماء في العركة ، وتقسم الحاصل على^(٢) مجموع الديون ، فخرج القسمة هو حظ صاحب المضروب في العركة .

مثال : العركة عشرون ، وأحد الديون ثمانية ، والآخر عشرة ، والآخر اثني عشر ، ومجموع الديون ثلاثون .

ضربنا الأول في العركة ، حصل مائة وستون ، قسمناه على مجموع خمسة وثلاث ، فهو حظ صاحب الثمانية ، ثم ضربنا الثاني وقسمنا الحاصل ، كذلك خرج ستة وثلاثان وهو حظ صاحب العشرة ، وعملنا بالدين الثالث ، كذلك حصل ثمانية وهو نصيب صاحب الاثني عشر من العركة ، وهذا العمل يكون إذا لم تكن الديون كثيرة ، وإذا كانت كثيرة بحيث يتعسر ضبط حاصل ضربها^(٢) وقسمتها ، فارسم الجدول على هذه الصورة ، أى سطره بعدة الديون ، وضع كل واحد من الديون فيها . أى في خلالها ، وصورة العركة فوقه ، وصورة مجموع الديون تحته ، واعمل ما عرفت من ضرب كل من الديون في العركة ، وقسمة الحاصل على مجموع الديون . ووضع الخارج كذلك سهلاً عليك ، وصورة العمل هكذا : يعنى الديون

(١) مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب رقم ١٢٥٣ : الصفحات ٥٢ حتى ٥٥ .

(٢) ناقصة في المخطوط .

تعقيب : قد تكون هذه القاعدة من تصنيف رمضان الكوردى كما جاء بآخر المخطوط . وهى لا تخرج في معانيها عما جاء بتدوين العامل في مخطوطه .

في هذا المخطوط يكتب الصفر : ٥ والخمسة :
كذا في المخطوط ١٢٥٣ .

| | | |
|------------------|-----------|-----------|
| التركة ٢٠ | | |
| ٢٠ ١٢ | ٢٠ ١٠ | ٢٠ ٨ |
| ٤٠ ٢٠ | ٠٠ ٢٠ | ١٦٠ |
| ٢٤٠ | ٢٠٠ | |
| ٣٠ | ٣٠ | ٣٠ |
| ٨ | ٦ | ٥ |
| | كسر ٢٠ | كسر ١٠ |
| مجموع ديون ٣٠ | | |

وهى الثمانية ، والعشرة . والاثنى عشر ، كل منها موضوع في علو سطر من سطور الشكل موضوع فوقه صورة العشرين التى هى عبارة عن التركة ، تحته الثلثين التى هى عبارة عن مجموع الديون ، وقد ضرب كل منها فى التركة ، ووضع حاصل ضربه تحته بعد خط عرضي ، وقسم الحاصل على مجموع الدين ، ووضع خارج القسمة تحت المقسوم عليه ، أعنى الثلثين بعد خط عرضي ، وما بقى من المقسوم كسرًا رُسمت صورته تحت الخارج الصحيح ، ورسم لفظ كسر فوقه ، وما صورته صورته المركب فى الرسم ضرب ضرب المركب فى المركب ، ووضع حاصله تحته ، وضع مقتضى الضرب ثم جمع ، كما هو القاعدة فى ضرب المركب فى المركب .

قاعدة في بيان تقسيم الغرماء
تقريباً من كل واحد من الغرماء في التركة وتقسيم المأكل
مجموع الديون في الخارج القسمة هو حظ صاحب المأكل
في التركة مثاله التركة عشرون واحداً الديون ثمانية والآخر
عشرة والآخر عشرة ومجموع الديون ثلثون ضرباً الأول
في التركة حصل مائة وستون فسمناه على مجموع خمسة
وثلث فحفظ صاحب الثمانية ثم ضربنا الباقي وسمناه
الحاصل كذلك خرج ستة وثلثان وهو حظ صاحب
العشرة وعلمنا بالدين الثالث حصل ثمانية وهو نصيب
صاحب الاثني عشر من التركة وهذا العمل كذا اذا لم يكن الديون
كثيرة فافهم ان كان كثيرة بحيث لا يمكن ضبط حاصل
و قسمها فليسم الجدول على هذه الصورة اي سطره بعدد
الديون وكل واحد من الديون في نهاية في خلاصا وصورة
التركة فوقه وصورة مجموع الديون تحته واعمل ما عرفت من
ضرب كل من الديون في التركة وقسمه الحاصل على مجموع الديون
ووضع الخارج كذلك سهلاً عليك وصورة العمل هكذا في
الديون وهي الثمانية والعشرة والاثني عشر كل منها موضع

في التركة مثاله التركة عشرون واحداً الديون ثمانية والآخر عشرة والآخر عشرة ومجموع الديون ثلثون ضرباً الأول في التركة حصل مائة وستون فسمناه على مجموع خمسة وثلث فحفظ صاحب الثمانية ثم ضربنا الباقي وسمناه الحاصل كذلك خرج ستة وثلثان وهو حظ صاحب العشرة وعلمنا بالدين الثالث حصل ثمانية وهو نصيب صاحب الاثني عشر من التركة وهذا العمل كذا اذا لم يكن الديون كثيرة فافهم ان كان كثيرة بحيث لا يمكن ضبط حاصل و قسمها فليسم الجدول على هذه الصورة اي سطره بعدد الديون وكل واحد من الديون في نهاية في خلاصا وصورة التركة فوقه وصورة مجموع الديون تحته واعمل ما عرفت من ضرب كل من الديون في التركة وقسمه الحاصل على مجموع الديون ووضع الخارج كذلك سهلاً عليك وصورة العمل هكذا في الديون وهي الثمانية والعشرة والاثني عشر كل منها موضع

| التركة | | |
|------------|-----|-----|
| ٢٥ | ٢٥ | ٢٥ |
| ١١ | ١٥ | ٨ |
| ٤٥ | ٢٥٥ | ١٦٥ |
| ٢٤٥ | ٢٥٥ | |
| ٣٥ | ٣٥ | ٣٥ |
| ٨ | ٨ | ٨ |
| | ٣٥ | ٣٥ |
| مجموع ديون | | |
| ٣٥ | | |

في العشر من الذي هو
التركة يكون الحاصل باذن
والدين ومن كسرها
على القسمة اعني مجموع
الديون يكون مجموع
الدين في ثمانية
سهم

شكل (١٨)

قاعدة في بيان تقسيم الغرماء : الصفحة (٥٢) من مخطوط المكتبة الأحمدية بعلب - رقم

فالثمانية لما لم تكن صورتها المرسومة صورة المركب ، ضربت في العشرين ،
فكان حاصل ضربها هكذا ١٦٠ .

والعشرة لما كانت صورتها صورة المركب في الرسم ، ضربت في العشرين الذي
هو صورة الحركة ، فكان صورة حاصل ضربه هكذا ٢٠٠ ، ثم جمع فصار هكذا
٢٠٠ .

وقس عليه حال الاثني عشر .

والامتحان - أى اختبار حال هذا النحو من القسمة صحيحة وفساداً - هو أن تعمل في
كل واحد بالمضروب والمضروب فيه كما في الضرب ، وبالمقسوم والمقسوم عليه كما في
القسمة ، تظهر الصحة بعدها بأن يؤخذ ميزان المضروب ، أعني كل واحد من الديون
على حدة ، وتضربه في ميزان المضروب فيه - أعني الحركة - وتأخذ ميزان الحاصل ،
وتحفظ كميته ، ثم تأخذ ميزان خارج قسمة حاصل ضرب ذلك الدين المضروب في
الحركة ، وتضربه في ميزان المقسوم عليه - أعني مجموع الديون - وتزيد عليه ميزان
الباقى من المقسوم إن كان ، ثم تأخذ ميزان المقسوم - وهو حاصل ضرب ذلك
الدين في الحركة المقسوم على مجموع الديون - فإن لم تتخالف الموازين الثلاث ، فالعمل
صحيح ، وإلا فالعمل خطأ .

ففي هذا الشكل مثلاً : الثمانية أحد الديون ، فهي مضروبة ، والحركة مضروب
فيها ، والثمانية نفسها ميزان ، فإذا ضربتها في الاثنين اللذين هما ميزان الحركة ،
حصل ستة عشر ، فإذا أخذت ميزانها بأن أسقطت منها تسعة ، بقى بعد الإسقاط
سبعة . فهي ميزان الحاصل . ثم إذا أخذت ميزان خارج قسمة مضروب الثمانية في
الحركة على مجموع الديون - وهو الخمسة - ضربته في ميزان المقسوم عليه - وهو
ثلاث - لأن الباقى من الثلاثين بعد الإسقاط تسعة تسعة ثلاثة ، حصل خمسة عشر ،
فإذا أخذت على الحاصل الباقى من المقسوم - أعني الثلاث - حصل ستة عشر . فإذا
أخذت ميزان هذا الحاصل بأن أسقطت منه تسعة ، بقى بعد الإسقاط أيضاً سبعة ،

فهى الميزانُ لهذا الحاصل . إذا أَخَذْتَ ميزانَ المقسوم - وهو المائةُ والستون - بأنْ
أَسْقَطْتَ تِسْعَةً تِسْعَةً . كان الباقي بعد الإسقاطِ كذلك سبعةً أيضاً . فلم تتخالف
الموازينُ فى ضَرْبِ هذا المضروبِ ، أعنى الثمانية . وإذا عملتَ فى الثانى والثالثِ أيضاً
مِثْلَ عملِكَ هذا . ولم تتخالف الموازينُ الثلثُ فى كلِّ منهما . ظهرَ أنَّ هذه القسمة
صحيحةٌ . فقيسْ على هذا حال عملِ الثانى والثالثِ حتى يظهرَ لك الحالُ .
تَمَّتْ الرسالةُ بعونِ الملكِ المَنَّانِ .

تصنيف رمضان الكوردى .

القسم الثاني

مسائل الحساب والجبر والمساحة

الواردة في كتاب "الكشكول" * لبهاء الدين العاملي

* طبعة مصر عام ١٣٠٢هـ = ١٨٨٤م - الطبعة العامة الشرفية
(مطبعة الشيخ شرف موسى ، بخان أبو طافية بمصر)

مقدمة

تعرّض بهاء الدين العاملي فيما تعرض له في كتابه «الكشكول» لبعض جوانب العلم الرياضى . فأورد بعض مسائل متفرقة بعضها في خواص الأعداد . والبعض الآخر في الحساب والجبر والمقابلة . كما ذكر العاملي أيضًا بعض مسائل في أعمال المساحة .

والمسائل التي جاءت في «الكشكول» هي على وجه التحديد أربع وعشرون مسألة موزعة على النحو التالى :

١ - خواص الأعداد وجمع المتواليات : خمس مسائل

٢ - علم الحساب : ثمانى مسائل .

٣ - علم الجبر والمقابلة : خمس مسائل .

٤ - أعمال المساحة : ست مسائل .

وقد تعرّضنا لهذه المسائل جميعها بما هي أهل له من الشرح والتحليل .

* * *

(١) خواص الأعداد وجمع المتواليات

تناول صاحب الكشكول في هذا المجال تعريف العدد ، وبيان الأعداد المتحابة بيد أنه لم يأت فيها بجديد حيث سبقه إليها ثابت بن قرة الحرانى . ثم عرج العاملي إلى الأعداد التامة والزائدة والناقصة . وربط بين صفات آدم وحواء وبين خواص الأعداد . وقدّم تفسيرًا للقول المنسوب إلى النبي عليه الصلاة والسلام من أن حواء خُلِقَتْ من الضلع الأيسر (من اليسير أو القليل حسب قول العاملي) لآدم .

ولقد تعرّض العاملي لقواعد إيجاد مجموع الأعداد على النظم الطبيعى (أى جمع المتوالية الحسابية التى أساسها الواحد) ، ومجموع الأزواج دون الأفراد . ومجموع

الأفراد دون الأزواج . كذا مجموع المربعات المتوالية ، ومجموع المكعبات المتوالية ، وهذه المتواليات جميعها قد سبق ورودها في متن كتاب العاملى « خلاصة الحساب » الذى تعرضنا له بالشرح والتحليل فى القسم الأول من كتابنا هذا .

* * *

[١] « أَجْمَعَ الحُسَابُ عَلَى أَنَّ تَعْرِيفَ العددِ بَأَنَّهُ نِصْفُ مجموعِ حاشيتهِ . وهو لا يَصْدُقُ عَلَى الواحدِ . إذْ لَيْسَ لَهُ حَاشِيَةٌ تَحْتَانِيَّةٌ . وفيه نظر . إذْ الحَاشِيَةُ الفَوْقَانِيَّةُ لِكُلِّ عددٍ تَزِيدُ عَلَيْهِ بِمَقْدَارِ نُقْصَانِ الحَاشِيَةِ التَّحْتَانِيَّةِ عَنْهُ . وَمِنْ ثَمَّةَ كَانَ مجموعُهَا ضَعْفَهُ .

وقد أجمعوا على أَنَّ العددَ إمَّا صحيحٌ أو كسْرٌ . فنقولُ الحَاشِيَةُ التَّحْتَانِيَّةُ لِلوَاحِدِ هِيَ النِّصْفُ . فالفَوْقَانِيَّةُ وَاحِدٌ وَنِصْفٌ . لَأَنَّهَا تَزِيدُ عَلَى الواحدِ بِقَدْرِ نُقْصَانِ النِّصْفِ عَنْهُ . كَمَا هُوَ شَأْنُ حَوَاشِيِ الأَعْدَادِ . وَالوَاحِدُ نِصْفُ مجموعِهَا .

فالتعريفُ المذكورُ صادقٌ عَلَى الواحدِ . بَلْ نَقُولُ : التَّعْرِيفُ الْمَذْكُورُ صَادِقٌ عَلَى جَمِيعِ الكُسُورِ أَيْضًا . وَلَيْسَ مَخْصُوصًا بِالصَّحَاحِ . مِثْلًا يَصْدُقُ عَلَى الثَّلْثِ أَنَّهُ نِصْفُ مجموعِ حاشيتهِ ، فَالتَّحْتَانِيَّةُ السُّدُسُ والفَوْقَانِيَّةُ ثَلَاثٌ وَسُدُسٌ . أَعْنَى نِصْفًا . وَلَا شَكَّ أَنَّ الثَّلْثَ نِصْفُ مجموعِ النِّصْفِ والسُّدُسِ . وَهُوَ الْمَرَادُ .

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٢٨٢ (الجزء الثالث) .

شرح المسألة الأولى : يُعَرَّفُ العددُ هُنَا بِأَنَّهُ نِصْفُ مجموعِ العددِ السَّابِقِ لَهُ وَالعددِ اللاحِقِ لَهُ (وَيُعْبَرُ عَنْهُمَا فِي الْمَثْنِ بِالْحَاشِيَتَيْنِ) . مِثَالُ ذَلِكَ الرِّقْمُ ٥ نِصْفُ مجموعِ ٤ . ٦ . وَبِالنِّسْبَةِ لِلوَاحِدِ يَقُولُ الْعَامِلَى إِنَّ التَّعْرِيفَ السَّابِقَ يَنْطَبِقُ عَلَيْهِ أَيْضًا إِذَا اعْتَبَرْنَا حَاشِيَتَيْهِ هُمَا $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{4}$ (أَيْ أَنَّ الْوَاحِدَ حَدًّا فِي سِلْسِلَةِ عَدَدِيَّةٍ تَزَايِدُهَا $\frac{1}{4}$) . كَذَلِكَ بِالنِّسْبَةِ لِلْكَسْرِ $\frac{1}{3}$. فَإِذَا اعْتَبَرْنَاهُ حَدًّا فِي مُتَوَالِيَةٍ حِسَابِيَّةٍ تَتَزَايَدُ حَدُودُهَا بِالْقِيَمَةِ $\frac{1}{6}$. يَكُونُ الْكَسْرُ $\frac{1}{3}$ وَسَطًا حِسَابِيًّا لـ $\frac{1}{6}$ (وَهُوَ الْحَاشِيَةُ التَّحْتَانِيَّةُ) ، $(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = \frac{1}{2}$ (وَهُوَ الْحَاشِيَةُ الْفَوْقَانِيَّةُ) .

[٢] « للشيخ الرئيس رسالة في العشق ، وقال فيها إِنَّ العشقَ سار في المجردات والفلكيات والعنصريّات والمعدنيّات والنباتات والحيوانات ، حتى إنّ أربابَ الرياضيّ قالوا الأعداد المُتَحَابَّة ، واستدركوا ذلك على إقليدس ، وقالوا فاتهُ ذلك ولم يذكره ، وهى :

المائتان والعشرون عددٌ زائدٌ ، أجزاءه أكثر منه ، وإذا جُمعت كانت أربعةً وثمانين ومائتين بغير زيادةٍ ولا نقصانٍ .

والمائتان والأربعة والثمانون عددٌ ناقصٌ ، أجزاءه أقلُّ منه ، وإنْ جُمِعَتْ كانت جُمْلَتُها مائتين وعشرين .

فَلِكُلِّ مِنَ الْعَدِيدِينَ الْمُتَحَايِينَ أَجْزَاءٌ مِثْلَ الْآخِرِ :

فالمائتان والعشرون لها نصفٌ ، ورُبْعٌ ، وخُمْسٌ ، وعُشْرٌ ، ونصفُ عُشْرٍ ، وجزءٌ من أحد عشر ، وجزءٌ من اثنين وعشرين ، وجزءٌ من أربعة وأربعين ، وجزءٌ من خمسة وخمسين ، وجزءٌ من مائة وعشرة ، وجزءٌ من مائتين وعشرين ، وجملة ذلك من الأجزاء البسيطة الصحيحة مائتان وأربعة وثمانون .

الكشكول - طبعة مصر - الصفحتان ١٩١ ، ١٩٢ (الجزء الثاني) .

شرح المسألة الثانية : يشير بهاء الدين العاملي - في هذا النص إلى الأعداد المتحابة ، ويسوق لها مثلاً هو العددان ٢٢٠ - ٢٨٤ : فالعدد ٢٢٠ يقبل القسمة على كل من الأعداد التالية (وهي عوامله) :

۲۲۰ - ۱۱۰ - ۵۵ - ۳۳ - ۲۲ - ۲۰ - ۱۱ - ۱۰ - ۵ - ۳ - ۲

فتكون أجزاءه على التوالي : ١١٠ ، ٥٥ ، ٤٤ ، ٢٢ ، ٢٠ ، ١١ ، ١٠ ، ٥ ،
٤ ، ٢ ، ١ ، ومجموع هذه الأجزاء هو ٢٨٤ . ومن ثمّ فهي أكثر من العدد
نفسه ، ومن هنا جاءت تسميته بعدد زائد .

والمائتان والأربعة والثمانون ليس لها إلا نصف ، ورُبْع ، وجزء من أحد وسبعين ، وجزء من مائة واثنين وأربعين ، وجزء من مائتين وأربعة وثمانين ، فذلك مائتان وعشرون .

فقد ظهر بهذا المثال تحاب العددين ، وأصحاب العدد يزعمون أن لذلك خاصية عجيبة في المحبة . مُجَرَّب . انتهى .

[٣] « أشرف الأعداد العدد التام ، وهو ما كانت أجزاؤه مساوية له : قالوا ولهذا كان عدد الأيام التي خلقت فيها السموات والأرض ، وهو الستة ، كما نطق به الذكر الحكيم .

وأما العدد الزائد (أو) الناقص فما زادت عليه أجزاؤه أو نقصت ، كالإثني عشر فإنه زائد ، والسبعة فإنها ناقصة ، إذ ليس لها إلا السبع .

= أما العدد ٢٨٤ فإنه من الممكن قسمته على كل من الأعداد (العوامل) :

٢ ، ٤ ، ٧١ ، ١٤٢ ، ٢٨٤ . فتكون أجزاؤه على التوالى :

١٤٢ ، ٧١ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ومجموعها ٢٢٠ ، وهو أقل من العدد الأصلي ٢٨٤ . ولذا يُسمى عدد ناقص .

يتضح في هذا المثال أن العدد ٢٢٠ يقبل القسمة على مجموعة من الأعداد (يطلق عليها هنا عوامل العدد) تؤدي إلى أن يكون المجموع الحسابي لأجزائه هو ٢٨٤ . بينما هذا العدد الأخير ٢٨٤ يقبل القسمة على مجموعة من الأعداد (العوامل) ليصبح المجموع الحسابي لأجزائه ٢٢٠ وهو العدد الأول . ومن ثم تُطلق على العددين ٢٢٠ ، ٢٨٤ تسمية العددين المتحابين .

هذا ويُنسب إلى ثابت بن قرة الحراني (٨٣٦ - ٩٠١ م) أنه توصل إلى قاعدة لإيجاد الأعداد المتحابية . حيث إنه ألف فيها رسالة . يوجد مصوّر لها في في معهد المخطوطات العربية بالقاهرة تحت رياضيات رقم ١٨ .

قال في الأنموذج^(١) وقد نظمت قاعدة في تحصيل العدد التام ، فقلت

حو با شد فرد أول ضعف زوج الزوج كم واحد
بود مضرب ايشان تا م وزنه ناقص وزايد

ومعناه أنه يؤخذ زوج الزوج ، وهو زوج لا يعدّه من الأفراد سوى الواحد .

وبعبارة أخرى عدد لا يعدّه عدد فرد ، وهذا مبني على أن الواحد ليس بعدد كالاثنين في المثال المذكور ، ويضعف حتى يصير أربعة ، ويسقط منه واحد فيصير ثلاثة ، وهو فرد أول لأنه لا يعدّه سوى الواحد فرد آخر وهو المراد بالفرد الأول ، فتضرب الثلاثة في الاثنين الذي هو زوج الزوج ، فيصير ستة وهو العدد التام ، وقس عليه .

مثلاً تأخذ الأربعة ، وهو زوج الزوج ، وتضعفه حتى يصير ثمانية ، وتسقط منه واحداً ، فيصير سبعة ، وهو فرد أول ، فتضربه في الأربعة فيصير ثمانية وعشرين ، وهو أيضاً عدد تام .

ومن خواص العدد التام أنه لا يوجد في كل مرتبة من الآحاد والعشرات وما فوقها إلا واحداً .

لا يوجد مثلاً في مرتبة الآحاد إلا الستة ، وفي العشرات إلا الثمانية والعشرين ، فقس واستخرج الباقي كما عرفت .

المسألة الثالثة :

الكشكول - طبعة مصر - الصفحتان ٣٢٦ - ٣٢٧ (الجزء الثالث) .

(١) للمحقق الدواني

تعقيب : سبق أن تحدثنا بالتفصيل عن الأعداد التامة والزائدة والناقصة عند شرح القاعدة الثامنة الواردة بالباب التاسع من مخطوط « خلاصة الحساب » بالقسم الأول من الكتاب .

[٤] « قال بعض أصحاب الأرتماطيقى :

إِنَّ عِدَدَ التَّسْعَةِ بِمَنْزِلَةِ آدَمَ عَلَيْهِ السَّلَامُ ، فَإِنَّ لِلْآحَادِ نِسْبَةَ الْأَبَوَّةِ إِلَى سَائِرِ الْأَعْدَادِ .

وَالْخَمْسَةُ بِمَنْزِلَةِ حَوَّاءَ ، فَإِنَّهَا الَّتِي يَتَوَلَّدُ مِنْهَا مِثْلُهَا ، فَإِنَّ كُلَّ عِدَدٍ فِيهِ خَمْسَةٌ ، إِذَا ضُرِبَ فِيهَا فِيهِ الْخَمْسَةُ ، فَلَا بُدَّ مِنْ وَجُودِ الْخَمْسَةِ بِنَفْسِهَا فِي حَاصِلِ الضَّرْبِ الْبَتَّةَ .

وَقَالُوا فِي قَوْلِهِ تَعَالَى طه إِمَارَةً إِلَى آدَمَ وَحَوَّاءَ ، وَكُلٌّ مِنْ هَذَيْنِ الْعَدَدَيْنِ إِذَا جُمِعَ مِنَ الْوَاحِدِ إِلَيْهِ عَلَى النِّظْمِ الطَّبِيعِيِّ ، اجْتَمَعَ مَا يُسَاوِي عِدَدَ الْأَسْمِ الْمُخْتَصِّ بِهِ ، فَإِذَا جُمِعْنَا مِنَ الْوَاحِدِ إِلَى التَّسْعَةِ ، كَانَ خَمْسَةً وَأَرْبَعِينَ ، وَهِيَ عِدَدُ آدَمَ ، وَإِذَا جُمِعَ مِنَ الْوَاحِدِ إِلَى الْخَمْسَةِ ، كَانَ خَمْسَةً عَشَرَ ، وَهِيَ عِدَدُ حَوَّاءَ .

وَقَدْ تَقَرَّرَ فِي الْحِسَابِ أَنَّهُ إِذَا ضُرِبَ عِدَدٌ فِي عِدَدٍ ، يُقَالُ لِكُلٍّ مِنَ الْمَضْرُوبِينَ ضَلْعٌ ، وَلِلْحَاصِلِ مَضْلَعٌ .

المسألة الرابعة : الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٢٩١ (الجزء الثالث) .

شرح : يشير العاملى هنا إلى الربط بين صفات آدم وحواء وبين خواص الأعداد ، فينقل عن بعض أصحاب الأرتماطيقى (أى الحساب) قولهم بأن آدم يقابل رقم ٩ ، وأن حواء تقابل رقم ٥ ، معتمدين فى هذه النسبة إلى أن التسعة هى كبرى الأرقام العشرة من الصفر إلى التسعة ، وبذلك تكون بمرتبة الأبوة بالنسبة إلى بقية الأرقام ، وأن الخمسة ينشأ عن ضربها فيما فيه الخمسة عدد فيه خمسة ، ومن ثم وصفها بأنها التى يتولد منها مثلها .

فإذا أخذنا رقم ٩ وجدنا أن مجموع الأرقام من الواحد إليه (أى ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩) = ٤٥ وهو عدد آدم ، ولتفسير ذلك يجدر بنا أن نشير إلى أن العرب - قبل استعمالهم للأرقام الهندية وتهذيبها - كانوا يشيرون إلى الأعداد بحروف الهجاء ، كما كان الحال عند اليونان فى صدر الفتح الإسلامى ، وذلك على النحو التالى :

وإذا ضُربت الخمسةُ في التسعةِ ، حصلَ خمسةٌ وأربعون ، وهي عددُ آدم ،
وضلعاهُ التسعةُ والخمسةُ .

قالوا وما ورد في لسان الشَّارعِ صلوات الله عليه وآله من قوله خُلِقَتْ حَوَّاءُ من
الضِّلَعِ الأيسرِ لآدم ، إنَّما ينكشفُ سرُّه بما ذكرناه ، فإنَّ الخمسة هي الضلعُ الأيسرُ
للخمسة والأربعين ، والتسعة الضلعُ الأكبر ، والأيسرُ من اليسير وهو القليل ، لا من
اليسار ، انتهى .

| | | | | | | | |
|------|---|-----|---|----|---|---|----|
| ٤٠٠ | ت | ٦٠ | س | ٨ | ح | ١ | أ |
| ٥٠٠ | ث | ٧٠ | ع | ٩ | ط | ٢ | ب |
| ٦٠٠ | خ | ٨٠ | ف | ١٠ | ي | ٣ | ج |
| ٧٠٠ | ذ | ٩٠ | ص | ٢٠ | ك | ٤ | د |
| ٨٠٠ | ض | ١٠٠ | ق | ٣٠ | ل | ٥ | هـ |
| ٩٠٠ | ظ | ٢٠٠ | ر | ٤٠ | م | ٦ | و |
| ١٠٠٠ | غ | ٣٠٠ | ش | ٥٠ | ن | ٧ | ز |

ومن هنا فإن كلمة آدم تشتمل على الحروف أ ، د ، م ، وبالتالي يكون المقابل
العددي لكلمة آدم هو :

$$أ + د + م = ١ + ٤ + ٤٠ = ٤٥$$

وهو نفس العدد الناتج عن جمع الأرقام من الواحد إلى التسعة (متزلة آدم)
بتسلسلها الطبيعي .

كذلك الحال بالنسبة لكلمة حوَّاء ، فإن المقابل العددي لها هو :

$$ح + و + أ = ٨ + ٦ + ١ = ١٥$$

وهو نفس العدد الذي نحصل عليه بجمع الأرقام من الواحد إلى الخمسة (متزلة
حوَّاء) .

[٥] «جَمْعُ الأَعْدَادِ عَلَى النِّظْمِ الطَّبِيعِيِّ : بزيادةِ واحدٍ على الأخير ، وضربِ المجموعِ في نصفِ الأخير .

وجمعُ الأزواجِ دون الأفرادِ : بضربِ نصفِ الرُّوجِ الأخيرِ فيما يليه بواحدٍ ، والعكس بزيادةِ واحدٍ على الفردِ الأخيرِ ، وتربيعِ [نصف] ^(١) الحاصلِ .

وجمعُ المربَّعاتِ المتواليةِ بزيادةِ واحدٍ على ضِعْفِ العددِ الأخيرِ ، وبضربِ ثُلثِ المجموعِ في مجموعِ تلك الأعدادِ .

وجَمْعُ المكعَّباتِ المتواليةِ بضربِ مجموعِ تلك الأعدادِ المتواليةِ من الواحدِ في نفسه .

يعرج العاملى بعد تناوله لجمع مكثونات كلمتى آدم وحوآ ومنزلتها من الأرقام إلى السمات الناتجة عن عمليات الضرب ، فيبدأ بتعريف الضلع والمضلع بأن الضلع هو المضروب أو المضروب فيه ، وأن المضلع هو حاصل الضرب ، ويستطرد قائلاً بأن حاصل ضرب التسعة (وهى منزلة آدم) فى الخمسة (وهى منزلة حوآ) هو ٤٥ ، وهو عدد آدم كما تقدم ، فيكون ضلعا عدد آدم هما منزلتا آدم وحوآ (أى التسعة والخمسة) .

وبناء على هذه الخواص يقال فى تفسير خلقِ حوآ من الضلع الأيسر لآدم بأن منزلة حوآ وهى الخمسة هى الضلع الأصغر (الأيسر) من الضلعين ٩ ، ٥ المكونين للمضلع ٤٥ وهو عدد آدم .

* * *

المسألة الخامسة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٣١٣ (الجزء الثالث) .

(١) أضيفت لتتفق مع القاعدة الثانية من الباب التاسع من كتاب «خلاصة الحساب» ، وهى قاعدة صحيحة .

شرح المسألة الخامسة : يشير العاملى هنا إلى جمع المتواليات العددية على النظم الطبيعى ، كذا جمع المربعات المتوالية والمكعبات المتوالية ، وهو ما جاء ذكره تفصيلاً بقواعد الباب التاسع من كتابه «خلاصة الحساب» :

=

= جمع الأعداد على النظم الطبيعي = (1 + 2 + 3 + 4 + + ن)

$$= \frac{n}{2} (1 + n) \quad (\text{القاعدة الأولى})$$

جمع الأزواج دون الأفراد = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + + (ن - 2) + (ن - 1) + ن)

$$= \frac{n}{2} \cdot \left(1 + \frac{n}{2}\right) \quad (\text{القاعدة الثالثة})$$

جمع الأفراد دون الأزواج = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + + (ن - 2) + (ن - 1) + ن)

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + n}{2} \right) \quad (\text{القاعدة الثانية})$$

جمع المربعات المتوالية = (1² + 2² + 3² + 4² + + ن²)

$$= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + + ن}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3 \times 2 \times 1} \quad (\text{القاعدة الرابعة})$$

جمع المكعبات المتوالية = (1³ + 2³ + 3³ + 4³ + + ن³)

$$= (1 + 2 + 3 + 4 + + ن)$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \quad (\text{القاعدة الخامسة})$$

(٢) علم الحساب

جاء في «الكشكول» ذكر ثمانى مسائل حسابية بعضها سبق وروده فى كتاب «خلاصة الحساب» ، والبعض الآخر لم يسبق وروده فيه ، كمسائل استخراج المضمرات من الأسماء والأعداد ، كأسماء الأشخاص والشهور والبروج . كذلك عرض العاملى لبعض مسائل التباديل والتوافيق وذلك فيما يختص بإيجاد عدد الكلمات التى يُتَحَصَّلُ عليها من تركيب حروف المعجم بشروط معينة .

ولعلَّ أقيم ما قدَّمه صاحب الكشكول فى هذه المجموعة من المسائل الحسابية هو القاعدة التى أوردها لإيجاد قيمة جذر الأصمِّ بالتقريب ، ويتضح - فى معرض شرحنا لهذه القاعدة - أنه عند تطبيقها على مثالين متباينين أن الخطأ الناشئ من التقريب فى حساب الجذر لم يتجاوز جزءاً من ألف جزء ، وبالتالي فالقاعدة تعطى نتائج على درجة عظيمة من الدقة ، وقاعدة العاملى هذه قد جاءت فى من كتابه «خلاصة الحساب» ، وهو ما قننا بشرحه وتحليله فى القسم الأول من كتابنا هذا .

* * *

[١] «إذا ضربت مخارج الكسور التى فيها حرف العين بعضها فى بعض حصل المخرج المشترك للكسور التسعة ، وهو ألفان وخمسمائة وعشرون .

ويقال إنه سئل على كرم الله وجهه عن مخرج الكسور التسعة ، فقال للسائل : اضرب أيام سنيتك فى أيام أسبوعك .

المسألة : الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٢١٧ (الجزء الثالث) .

شرح : الكسور التسعة هى : $\frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \frac{1}{6} , \frac{1}{7} , \frac{1}{8} , \frac{1}{9} , \frac{1}{10}$.

ومخارج الكسور التى فيها حرف العين هى : أربعة ، سبعة ، تسعة ، عشرة

فحاصل ضرب هذه المخارج = $4 \times 7 \times 9 \times 10$

=

= ٢٥٢٠ =

[٢] «حَوْضٌ أُرْسِلَ إِلَيْهِ ثَلَاثُ أَنْيَابٍ تَمْلُؤُهُ إِحْدَاهَا فِي رُبْعِ يَوْمٍ ، وَالْأُخْرَى فِي سُدْسِهِ ، وَالْأُخْرَى فِي سَبْعِهِ ، وَفِي أَسْفَلِهِ بِالْوَعَةِ تُفْرَغُهُ فِي ثَمْنِ يَوْمٍ ، فَنِي كَم يَمْتَلِئُ .

طَرِيقُهُ أَنَّهُ يُسْتَعْلَمَ مَا يَمْلُؤُهُ الْجَمِيعُ فِي يَوْمٍ ، وَهُوَ سَبْعَةُ عَشَرَ حَوْضًا ، وَمَا تَفْرَغُهُ الْبَالُوعَةُ وَهُوَ ثَمَانِيَةَ حَيَاضٍ ، فَانْقِصَهُ مِنَ الْأَوَّلِ ، بَقِيَ تِسْعَةٌ ، فَنِي الْيَوْمِ يَمْتَلِئُ تِسْعَ مَرَّاتٍ ، فَيَتَلَّى مَرَّةً فِي تِسْعِ النَّهَارِ .

= كذلك فإن المخرج المشترك (ويحصل عليه في عملية توحيد مخارج الكسور)

$$\text{للكسور التسعة} = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 3$$

$$= 2520$$

وهو يقبل القسمة على أي من مخارج الكسور التسعة .

وطبقاً للقول المنسوب إلى سيدنا على كرم الله وجهه - فإن مخرج الكسور

$$\text{التسعة (أي المخرج المشترك)} = 360 \times 7$$

$$= 2520$$

ومن الواضح صحة هذه الأقوال ، وتدلل على قوة الملاحظة والميل إلى وضع القاعدة أو النتيجة الرياضية في صورة يسهل تذكرها للعمل بها .

المسألة الثانية :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٣١٣ (الجزء الثالث) .

شرح :

| | | |
|--|------|---------|
| عدد الأحواض التي تملؤها الأنوبة الأولى في اليوم | = ٤ | أحواض |
| عدد الأحواض التي تملؤها الأنوبة الثانية في اليوم | = ٦ | أحواض |
| عدد الأحواض التي تملؤها الأنوبة الثالثة في اليوم | = ٧ | أحواض |
| عدد الأحواض التي تملؤها الأنابيب الثلاث في اليوم | = ١٧ | حوضاً |
| عدد الأحواض التي تفرغها البالوعة في اليوم الواحد | = ٨ | أحواض = |

[٣] « في استخراج الاسم المُضَمَّر :

مُرَّة ليلتي أوله ، ويخبر بعدد الباقي ، فاحفظه .

ثم ليخبر بما عدا ثانيه ، ثم بما عدا ثالثه ، وهكذا .

ثم اجمع المحفوظات ، واقسم الحاصل على عددها بعد إلقاء محفوظ واحد منها ،

$$= \dots \text{ عدد الأحواض الممكن ملؤها (مع استمرار تفريغ البالوعة) في اليوم الواحد}$$

$$= 17 - 8 = 9 \text{ أحواض}$$

وبالتالي يمتلئ الحوض في زمن قدره $\frac{1}{9}$ يوم .

المسألة الثالثة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٤١ (الجزء الأول) .

شرح : نبدأ بتطبيق هذه القاعدة على مثل محدد وليكن اسم « عمرو » وذلك لتوضيح منطوق القاعدة

| | | | | |
|-----|----|-----|---|------------------------|
| ع | م | ر | و | حروف الاسم |
| ٧٠ | ٤٠ | ٢٠٠ | ٦ | المقابل العددي لكل حرف |
| : | + | + | + | المحفوظ الأول |
| ٢٤٦ | | | | |
| : | + | + | + | المحفوظ الثاني |
| ٢٧٦ | | | | |
| : | + | + | + | المحفوظ الثالث |
| ١١٦ | | | | |
| : | + | + | + | المحفوظ الرابع |
| ٣١٠ | | | | |
| : | | | | مجموع المحفوظات |
| ٩٤٨ | | | | |

$$= \frac{948}{3} = \frac{\text{مجموع المحفوظات}}{(\text{عدد المحفوظات} - 1)}$$

| | | | | |
|---|-----------|---|-----|------------------------------|
| = | ٢٤٦ - ٣١٦ | = | ٧٠ | المقابل العددي للحرف الأول |
| = | ٢٧٦ - ٣١٦ | = | ٤٠ | والمقابل العددي للحرف الثاني |
| = | ١١٦ - ٣١٦ | = | ٢٠٠ | والمقابل العددي للحرف الثالث |
| = | ٣١٠ - ٣١٦ | = | ٦ | والمقابل العددي للحرف الرابع |

= القاعدة التي قدمها العامل صحيحه تماماً ، ومن الممكن إثباتها - في صيغتها العامة - بالرموز على الوجه التالي :

نفرض أن الاسم المضممر يمكن التعبير عنه بالمقابل العددي لك حرف منه كما يلي :

١ع ٢ع ٣ع عن حيث ن عدد حروف الاسم المضممر

وبتطبيق القاعدة تتجمع لنا المحفوظات التالية (وهي بعدد حروف الاسم ن)

المحفوظ الأول = ١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + + عن

المحفوظ الثاني = ١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + + عن

المحفوظ الثالث = ١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + + عن

المحفوظ الرابع = ١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + + عن

المحفوظ الأخير = ١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + + عن (ن - ١)

مجموع المحفوظات = (ن - ١) [١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + + عن]

$$\frac{\text{مجموع المحفوظات}}{(ن - ١)} = \frac{\text{مجموع المحفوظات}}{(\text{عدد المحفوظات} - ١)}$$

$$= [١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + + عن]$$

ويكون المقابل العددي للحرف الأول

$$= \left[\frac{\text{مجموع المحفوظات}}{(\text{عدد المحفوظات} - ١) - \text{المحفوظ الأول}} \right]$$

$$= (١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + + عن)$$

$$- (١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + + عن)$$

$$= ١ع \text{ وهو المطلوب}$$

وقس على ذلك بالنسبة لبقية المقابلات العددية لأحرف الاسم المضممر ٢ع ، ٣ع ،

٤ع حتى عن .

ثم انتقص من خارج القسم المحفوظ الأول ، فالباقي هو عدد الحرف الأول .

ثم انتقص منه المحفوظ الثاني ، فالباقي هو عدد الحرف الثاني ، وهكذا .

[٤] « في استخراج اسم الشهر المضمر أو البرج المضمر : مؤره ليأخذ

[للمضمر و] ^(١) لكل ما فوق المضمر ثلاثة ثلاثة ، وله مع ما تحته اثنين

اثنين ، ثم يجبرك بالجمع ، فتلقى منه أربعة وعشرين ، وتعد الباقي من محرم .

أو من الحمل . فما انتهى إليه فهو المضمر .

المسألة الرابعة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٤١ (الجزء الأول) .

(١) يبدو أنه سقط من النسخ - حيث إن بدوه لا يستقيم القول .

شرح : حيث إن عدة الشهور أو عدة البروج اثنا عشر - فإن المسألة هي تحديد مرتبة

من اثني عشرة مرتبة . ويتضح من الشكل المرفق أنه بفرض العدد الدال على الشهر

أو البرج المضمر س - وبأخذ

ثلاثة ثلاثة للمضمر ولكل ما فوقه

نحصل على : ٣س

وبأخذ اثنين اثنين لما تحته نحصل

على : ٢(١٢ - س)

فيكون المجموع :

٣س + ٢(١٢ - س)

= س + ٢٤

الشهر أو البرج

الأول

(محرم أو الحمل)

س

المضمر

ما تحت المضمر

١٢

الشهر أو البرج

الأخير

١٢

١٢

١٢

١٢

١٢

١٢

١٢

شرح : حيث إن عدة الشهور أو عدة البروج اثنا عشر - فإن المسألة هي تحديد مرتبة

من اثني عشرة مرتبة . ويتضح من الشكل المرفق أنه بفرض العدد الدال على الشهر

أو البرج المضمر س - وبأخذ

ثلاثة ثلاثة للمضمر ولكل ما فوقه

نحصل على : ٣س

وبأخذ اثنين اثنين لما تحته نحصل

على : ٢(١٢ - س)

فيكون المجموع :

٣س + ٢(١٢ - س)

= س + ٢٤

وبإسقاط ٢٤ من المجموع ننتهي إلى س وهي مرتبة الشهر أو البرج المضمر - فيعد من

شهر المحرم في حالة الشهور - ومن برج الحمل في حالة البروج .

ولنأخذ مثلاً على ذلك الشهر أو البرج السابع - فبالنسبة للمضمر وما فوقه نحصل

على ٣ × ٧ - وبالنسبة لما تحته نحصل على ٢ × ٥ - فيكون المجموع

٢١ + ١٠ = ٣١ - وبإسقاط ٢٤ من ٣١ نحصل على ٧ وهو المرتبة المضمرة .

[٥] « فى استخراج العدد المضمّر :

مُرّه ليلقى منه ثلاثة ثلاثة . ويخبرك بالباقي . فتأخذ لكل واحدٍ منه سبعين .

ثمّ مُرّه ليلقى منه سبعة سبعة . ويخبرك بالباقي . فتأخذ لكل واحدٍ منه خمسة عشر .

ثمّ مُرّه ليلقى منه خمسة خمسة ، ويخبرك بالباقي . فتأخذ لكل واحدٍ منه واحدًا وعشرين .

ثمّ تجمع الحواصل . وتلقى من المجتمع مائة وخمسة ، فما بقى فهو المطلوب . انتهى » .

المسألة الخامسة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٤١ (الجزء الأول) .

تعقيب :

يساورنا الشك فى صحة هذا النص حيث إنه بعد إسقاط ثلاثة ثلاثة من العدد المضمّر . وضرب الباقي فى سبعين ينتج عدد صحيح مضروب فى ٧ . وبإلقاء (إسقاط) السبعات منه - فى الخطوة التالية - لا يتبقى شيء . كذلك الحال بالنسبة لضرب الباقي الثانى فى ١٥ حيث ينتج عدد صحيح مضروب فى ٥ . وبإسقاط الخمسات منه لا يتبقى شيء .

نضيف إلى ما تقدم أن هذه القاعدة - عند ضبطها - لا تفيد فى حالة العدد المضمّر الذى يقبل القسمة على ثلاثة . حيث يكون الباقي الأول صفرًا . الأمر الذى يتوقف عنده العمل دون التوصل إلى العدد المضمّر .

[٦] « إذا قيل كم يتحصّل من تركيب حروف المعجم كلمة ثنائية سواء كانت مهمة أو مستعملة ، فاضرب ثمانية وعشرين في سبعة وعشرين ، فالحاصل جواب . فإن قيل كم يتركب منها كلمة ثلاثية بشرط أن لا يجتمع حرفان من جنس ، فاضرب حاصل ضرب ثمانية وعشرين في سبعة وعشرين في ستة وعشرين ، يكن تسعة عشر ألفاً وستمائة وستة وخمسين .

وإن سُئِلت عن الرباعية ، فاضرب هذا المبلغ في خمسة وعشرين : والقياسُ فيه مطرّدٌ في الخماسية فما فوق . انتهى . »

المسألة السادسة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ١٥ (الجزء الأول) .

شرح : لما كانت حروف الهجاء ثمانية وعشرين ، فإن تكوين كلمة ثنائية باستعمال الحرف الأول أمع كل من بقية حروف الهجاء يؤدي إلى ٢٧ كلمة سواء كانت هذه الكلمة مستعملة أو غير ذات المعنى . وإذا كررنا العمل نفسه بالنسبة للحرف الثاني ب حصلنا على ٢٧ كلمة أخرى ، وهكذا بالنسبة لبقية حروف المعجم ، فيكون المتحصل من تركيب حروف المعجم كلمة ثنائية هو

$$٢٨ (٢٨ - ١) = ٢٨ \times ٢٧$$

أما إذا كان المطلوب تكوين كلمة ثلاثية بحيث لا يجتمع فيها حرفان من نفس النوع . فإنه باتباع الأسلوب السابق نحصل على عدد الكلمات الآتية :

عدد الكلمات الثنائية \times (عدد حروف المعجم - الحرفين الداخلين في الكلمة الثنائية)

$$٢٨ \times (٢٨ - ١) \times (٢ - ٢٨) \text{ أى}$$

$$= ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ = ١٩٦٥٦ \text{ كلمة ثلاثية}$$

وبنفس القياس يكون عدد الكلمات الرباعية التي لا يتكرر فيها حرف

$$\text{هو } ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ \times ٢٥$$

$$= \text{والكلمات الخماسية : } ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ \times ٢٥ \times ٢٤ =$$

$$= \text{أى } 28 (1 - 28) (2 - 28) (3 - 28) (4 - 28)$$

ومثل هذه المسألة يُدرّس اليوم في باب التباديل والتوافيق . ولكى نزيد الأمر وضوحاً . لنفرض أن لدينا خمسة حروف هجائية . والمطلوب معرفة عدد الكلمات الممكن تركيبها من هذه الحروف الخمسة بشرط عدم تكرار أى حرف في نفس الكلمة ولتكن الحروف ا ب ج د هـ

فإذا احتفظنا بالمجموعة الرباعية ا ب ج د ثابتة كان هناك حلان فقط . أو تبديلان هما :

$$\begin{array}{l} \text{إما } \underline{\text{ا ب ج د هـ}} \\ \text{وإما هـ } \underline{\text{ا ب ج د}} \end{array} \quad \text{التباديل} = 2$$

وإذا قصرنا ثبات العريب على الأحرف الثلاثة الأولى فحسب . حصلنا على التباديل الآتية :

$$\begin{array}{l} \underline{\text{ا ب ج د هـ}} \\ \underline{\text{ا ب ج هـ د}} \\ \underline{\text{د ا ب ج هـ}} \\ \underline{\text{د هـ ا ب ج}} \\ \underline{\text{هـ ا ب ج د}} \\ \underline{\text{هـ د ا ب ج}} \end{array} \quad \text{التباديل} = 2 \times 3$$

وبنفس المنطق نجد أنه عند الاحتفاظ بالحرفين الأولين ثابتين العريب ، فإن عدد التباديل الممكنة ، أى عدد الكلمات الممكن تركيبها تحت هذه الشروط هي :

$$2 \times 3 \times 4$$

أما إن رفعت القيود عن أى ترتيب لمجموعة من الحروف ، فإن عدد التباديل بالنسبة للحروف الخمسة

$$= 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$\text{أو } = 5 \times (1 - 5) \times (2 - 5) \times (3 - 5) \times (4 - 5)$$

وهو ما نسميه اليوم مضروب ٥ ونعبر عنه رياضياً بالرمز ٥ !

= فيكون عدد الكلمات الممكن تركيبها من خمسة أحرف معينة بشرط عدم تكرار أى حرف منها فى الكلمة الواحدة

$$= \text{مضروب } ٥ = ٥ !$$

$$= ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠ \text{ كلمة}$$

أما إن كان المطلوب تكوين كلمة ثنائية فقط باستعمال حرفين من الحروف الخمسة المحددة . فإننا نعود إلى نوع المسألة التى أوردناها العاملى وتدخّل لا فى التباديل وإنما فى التوافق . وفى هذه الحالة يمكن التعبير عن الحل رياضياً على الصورة :

$$٥ ق٢ = ٥ \times ٤ = ٢٠ \text{ كلمة (الطرف الأيسر يشمل حدين فقط)}$$

وإن كان المطلوب تركيب كلمة ثلاثية بدلاً من ثنائية مع بقية الشروط

$$= ٥ \times (١ - ٥) \times (٢ - ٥) \text{ المينة يكون الجواب : } ٥ ق٣$$

$$= ٥ \times ٤ \times ٣$$

$$= ٦٠ \text{ كلمة}$$

$$= ٥ \times (١ - ٥) \times (٢ - ٥) \times (٣ - ٥) \text{ وللکلمة الرباعية : } ٥ ق٤$$

$$= ١٢٠ \text{ كلمة}$$

$$= ١٥ \text{ : } ٥ ق٥ \text{ وللکلمة الخماسية}$$

$$= ١٢٠ \text{ كلمة أيضاً}$$

وإذا أردنا التعبير - بالرموز الرياضية - عن مسألة العاملى نقول :

عدد الكلمات الثنائية المركبة من حروف

$$= ٢٨ ق٢$$

المعجم

$$= ٢٨ \times ٢٧ = ٧٥٦ \text{ كلمة}$$

عدد الكلمات الثلاثية المركبة من حروف

$$= ٢٨ ق٣$$

المعجم

$$= ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ = ١٩٦٥٦ \text{ كلمة}$$

عدد الكلمات الرباعية المركبة من حروف

$$= ٢٨ ق٤$$

المعجم

$$= ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ \times ٢٥$$

$$= ٤٩١٤٠٠ \text{ كلمة}$$

وعدد الكلمات الخماسية المركبة من حروف

$$= ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ \times ٢٥ \times ٢٤$$

المعجم

$$= ١١٧٩٣٦٠٠ \text{ كلمة .}$$

[٧] «كلُّ عددٍ قُسمَ على عددٍ فيكون نسبةُ الخارجِ من القسمةِ إلى مُربَّعه كنسبةِ المقسوم عليه إلى المقسوم .

فإذا أردنا أن نُحصِّلَ مجذورًا يكون نسبته إلى جذره كنسبة عددٍ إلى عدد آخر ،
نقسم العدد الأولَ على العدد الثاني ، فما خرج من القسمة يكون مضروبهُ في نفسه
العدد المطلوب .

المسألة السابعة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٣٣٠ (الجزء الثالث) .

شرح : لنرمز - في الشقِّ الأول من النصِّ - للعدد المقسوم بالحرف ن وللعدد المقسوم
عليه بالحرف م ، فيكون المقابل الرياضي للنص هو :

$$\frac{ن}{م} = \frac{م}{ن} = \text{نسبة المقسوم عليه إلى المقسوم}$$

وهو صحيح وواضح من اختصار الكسر .

أمَّا بالنسبة للشقِّ الثاني من النص - فيمكن تمثيله رياضياً على الوجه التالي :

$$\frac{١٤}{٢٤} = \frac{ن}{٢٤} \quad \text{حيث } ١٤ ، ٢٤ \text{ عددان}$$

$$\text{فإن } ن = \left(\frac{١٤}{٢٤} \right)$$

وهي النتيجة المباشرة لتربيع طرفي المعادلة السابقة .

[٨] « يحصل جذر الأصم بالتقريب بأن تأخذ أقرب الأعداد المجذورة إليه .
ويُسقط منه ، ويحفظ الباقي ، ثم تأخذ جذره وتضعفه وتزيد عليه واحداً .
ثم تنسب ما يبقى بعد الإسقاط إلى الحاصل ، ثم تزيد على جذره حاصل
النسبة ، فالجتمع جذر الأصم . انتهى » .

المسألة الثامنة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٣٢٩ (الجزء الثالث) .

شرح : لنفرض أن المطلوب إيجاد جذر ع . وأن n^2 أقرب مربعات الأعداد
الصحيحة إلى ع . وبالتالي يمكن وضع ع على الصورة :

$$ع = (ن + م) \text{ حيث } م \text{ هو الباقي بعد إسقاط } ن^2 \text{ من } ع .$$

وطبقاً للنص فإن بهاء الدين العاملى يذكر القيمة التالية لجذر ع :

$$\left[\frac{م^2}{ن^2 + ١} + ن \right] = \overline{ع}$$

$$\text{مثال ذلك } ٣.٢٨٥٧١٤ = ٣ \frac{٢}{٧} = \left(\frac{٢}{١ + ٣ \times ٢} + ٣ \right) = \overline{١١}$$

أما القيمة الصحيحة فهي : $\overline{١١} = ٣.٣١٦٦$

فيكون الخطأ في القيمة المقررة حسب هذه المعادلة هو : - ٠.٩٣ %

مثال آخر هو $\overline{١٥٣}$:

$$(٩ + ١٢^2) = (٩ + ١٤٤) = ١٥٣$$

$$\therefore ن = ١٢ \cdot م = ٩ = \overline{١٥٣} / ١٢.٣٦$$

بينما القيمة الصحيحة لجذر ١٥٣ هي ١٢.٣٦٩٣

فيكون الخطأ في القيمة التقريبية هو : - ٠.٠٧٥ %

هذا وقد أتينا على ذكر هذه القاعدة في صدر الفصل السادس من الباب الأول

من كتاب «خلاصة الحساب» للعالمى .

(٣) علم الجبر والمقابلة

يضم كتاب «الكشكول» خمس مسائل في الجبر والمقابلة ، منها مسألتان عدديتان ، والثلاث الباقيات مسائل رمزية عامة ، تختص بعلاقات المربعات (أى المجهولات المرفوعة للقوة الثانية من أمثال سر^٢ ، ص^٢) وحواشيها (ما يسبقها وما يليها) وجذورها ، وهى فى مجموعها مسائل جبرية مباشرة .

[١] «سمع رجلان رجلاً ينادى على سلعة .

فقال أحدهما للآخر : إن أعطيتنى ثلث ما معك ، وضممته إلى ما معى ، تم لي ثمنها .

وقال له الآخر : إن ضمنت رُبْعَ ما معك إلى ما معى ، تم لي ثمنها .

طريق هذه المسألة وأمثالها :

أن يُضْرَبَ مَخْرَجُ الثُلْثِ فى مَخْرَجِ الرُّبْعِ ، وَيَنْقُصَ من الحاصلِ واحدٌ ، فالباقي ثمنُها ، فينقص من الحاصل ثلثه ، فيبقى ما مع أحدهما ، وهو ثمانية ، ثم رُبعه فيبقى ما مع الآخر ، وهو تسعة .

المسألة الأولى :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٢١٦ (الجزء الثالث) .

تعقيب : هذه المسألة هى بعينها المسألة السادسة من الباب العاشر بكتاب «خلاصة الحساب» لنفس المؤلف .

[٢] « نريد عددًا إذا ضُوعِف وزيدَ على الحاصلِ واحدٌ ، وضُربَ الكلُّ في ثلاثةٍ ، وزيدَ على الحاصلِ اثنان . ثمَّ ضُربَ ما بلغ في أربعةٍ ، وزيدَ على الحاصلِ ثلاثٌ . بلغَ خمسةٌ وتسعين .

فبالجبر فرضناه شيئًا ، وعملنا ما قاله السائلُ . فأنتهى العملُ إلى أربعةٍ وعشرين شيئًا وثلاثةٍ وعشرين عددًا تعدلُ خمسةً وتسعين . أسقطنا المشترك . بقى أربعةٌ وعشرون شيئًا مُعادلاً لاثنتين وسبعين ، وهى الأولى من المفردات . قسمنا العددَ على عددِ الأشياءِ ، خرجَ ثلاثةٌ وهو المجهولُ .

وبالعمل بالعكس نقصنا من الخمسة والتسعين ثلاثة ، وقسمنا الباقي على أربعة ، ونقصنا من الخارج اثنين ، وقسمنا الباقي على ثلاثة ، ونقصنا من الخارج - وهو السبعة - واحدًا ، ونصَّفنا الباقي .

وبالخطأين : الفرضُ الأولُ اثنان . الخطأُ الأولُ أربعةٌ وعشرون ناقصة . الفرضُ الثانى خمسة ، الخطأُ الثانى ثمانية وأربعون زائدة . المحفوظُ الأولُ ستةٌ وتسعون ، المحفوظُ الثانى مائةٌ وعشرون ، والخطآن مختلفان . فقسمنا مجموعَ المحفوظين - وهو مائتان وستة عشر - على مجموعِ الخطأين : وهو اثنان وسبعون - خرجَ ثلاثةٌ ، وهو المطلوب .

المسألة الثانية :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٢٧٢ (الجزء الثالث) .

شرح : إذا رُمز للعدد المجهول (أوالشئ) بالرمز س ، فإنَّ منطوق المسألة يكون على الوجه الآتى :

$$٩٥ = ٣ + ٤ \times [٢ + ٣ \times (١ + س)]$$

أى أن ٢٤ س + ٢٣ = ٩٥ وبإسقاط العدد المشترك وهو ٢٣ من طرفى المعادلة ، نحصل على المعادلة :

$$٢٤ س = ٧٢ \text{ وهى معادلة من الدرجة الأولى .}$$

= وهى ما عُبِّرَ عنها المؤلفُ بأربعةٍ وعشرين شيئاً مُتَعَادِلًا لاثنتين وسبعين . وبقسمة العدد (وهو ٧٢) على عدد الأشياء (وهو ٢٤) . نحصل على قيمة الشيء أو العدد المجهول :
س = ٣ .

هذا هو حلُّ المسألة بطريق الجبر والمقابلة . ونصل إلى نفس الجواب بالعمل بالعكس .

أمَّا حل المسألة باستخدام حساب الخطأين . فيتم على الوجه التالى :

| | | | |
|------------------|-------|------------------------------|---------|
| بالمفروض الأول | = ٢ . | يكون الخطأ الأول | = - ٢٤ |
| وبالمفروض الثانى | = ٥ . | يكون الخطأ الثانى | = ٤٨ |
| المحفوظ الأول | = | المفروض الأول × الخطأ الثانى | = ٩٦ |
| المحفوظ الثانى | = | المفروض الثانى × الخطأ الأول | = - ١٢٠ |

$$\therefore \text{العدد المطلوب} = \frac{[\text{مجموع المحفوظين}]}{[\text{مجموع الخطأين}]}$$

(حيث إن الخطأين مختلفا الإشارة)

$$= \frac{216}{72} = 3 \text{ وهو المطلوب}$$

[٣] «كلُّ مُربعٍ فهو يزيدُ على حاصلِ ضربِ جذرِ كُلِّ من المربعين اللذين هما حاشيته في جذر الآخر بواحدٍ» .

[٤] «التفاضلُ بين كلِّ مربعين بقدرِ حاصلِ ضربِ مجموعِ جذريهما في التفاضلُ بين ذينك الجذرين» .

المسألة الثالثة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٢١٧ (الجزء الثالث) .

شرح المسألة الثالثة : نفرض ضلع (أو جذر) المربع س

فيكون حاشيته : (س - ١) • (س + ١)

فطبقاً للقاعدة المبينة بالمتن :

$$\sqrt{(س - ١) \cdot (س + ١)} = س^٢$$

وبإجراء عملية الضرب في الطرف الأيسر من المعادلة

$$\sqrt{(س - ١) \cdot (س + ١)} = س^٢$$

$$١ - س^٢ =$$

$$١ - س^٢ = س^٢ + (١ - س^٢) =$$

فقول العاملِ صحيح تماماً .

• • •

المسألة الرابعة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٣٣٨ (الجزء الثالث) .

شرح المسألة الرابعة : يقصد بالتفاضل هنا الفرق - والصورة الرياضية لهذا المنطوق هي :

$$(س^٢ - ص^٢) = (س + ص) (س - ص)$$

فبإجراء عملية ضرب القوسين في الطرف الأيسر من المعادلة ينتج :

$$(س^٢ - ص^٢) = (س + ص) (س - ص)$$

$$= \text{الطرف الأيمن من المعادلة}$$

فالقول الوارد في المتن صحيح .

[٥] «كلُّ مُرَبَّعٍ فالفضلُّ بينه وبين أقربِ المربَّعاتِ التي تحته إليه يُساوى مجموع جذريهما . والفضلُّ بينه وبين أقربِ المربَّعاتِ التي فوقه إليه يُساوى مجموع جذريهما» .

المسألة الخامسة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٣٠٤ (الجزء الثالث) .

شرح المسألة الخامسة : لنفرض المربع $(ن + ١)^2$. فيكون أقرب المربعات التي تحته إليه هو $ن^2$

فطبقاً لمنطوق المؤلف .

$$(ن + ١)^2 - ن^2 = (ن + ١) + ن$$

وهذا صحيح تماماً حيث إنه بربيع القوس في الطرف الأيمن للمعادلة نجد أن

$$ن^2 + ٢ن + ١ - ن^2 = ١ + ن + ن$$

وبالمثل إذا فرضنا المربع $ن^2$. فإن أقرب المربعات التي فوقه إليه هو $(ن + ١)^2$.

فيكون

$$(ن + ١)^2 - ن^2 = (ن + ١) + ن$$

مثال ذلك المربعين ١٦ - ٩ :

$$٧ = ٩ - ١٦$$

$$\text{ومجموع جذريهما} = ٣ + ٤ = ٧ = \text{الفضل بين مربعيهما}$$

كذلك المربعين ٤٩ - ٦٤ :

$$\text{فالفضل بينهما} = ٦٤ - ٤٩ = ١٥$$

$$\text{ومجموع جذريهما} = ٧ + ٨ = ١٥ \text{ ويعادل الفضل بين مربعيهما .}$$

(٤) أعمال المساحة

يضم «الكشكول» عدّة مسائل وطرق تعرّض لجوانب مختلفة في مجال أعمال المساحة منها :

- ١ - كيفية قياس حجم الجسم غير المنتظم (الجسم غير الهندسى) .
- ٢ - تحديد حصص من الأرض من واقع معلومات وشروط معينة .
- ٣ - كيفية قياس ارتفاع المرتفعات دون الاستعانة بالاسطرلاب .
- ٤ - طرق تعيين فروق النسوب (فروق الارتفاعات) بين مواضع مختلفة ، وهى ما يُعبّر عنها في أعمال العاملى بطُرق وَزْن الأرض ، وهذه عملية هامة لشق الأنهر والقنوات .
- ٥ - طريقة لتعيين ارتفاع الشمس دون استخدام للاسطرلاب أو لآلة ارتفاع .

* * *

[١] «تستعلم مساحة الأجسام المشكّلة المساحة - كالفيل والجمل - بأن يُلقى في حوضٍ مربعٍ ، ويُعلَم الماء ، ثم يُخرج منه ويُعلم أيضًا ، ويُمسح ما نُقِصَ ، فهو المساحة تقريبًا . انتهى» .

المسألة الأولى :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ١٥ (الجزء الأول) .

شرح المسألة الأولى : يبين العاملى هنا طريقة تعيين حجم الجسم غير المنتظم كجسم الفيل أو جسم الجمل مثلاً ، وذلك بإلقاء الجسم في حوض ماء ، وقياس مقدار إزاحة الجسم للماء ، فيكون قدر حجم الجسم ، ويستعمل العاملى هنا لفظ المساحة في معنى قياس الحجم ، وليس في معنى مساحة السطوح .

[٢] يروى الشيخ بهاء الدين العاملى عن والده ما نصّه :

« قال جامعُهُ من خطِّ والدى قدّس الله روحه :

(مسألة) قطعة أرض فيها شجرة مجهولة الارتفاع ، فطار عصفورٌ من رأسها إلى الأرض إلى انتصاف النهار والشمس فى أول الجدى فى بلدٍ عرضه إحدى وعشرون درجةً . فسقطَ على نقطةٍ من ظلِّ الشجرة . فباعَ مالكُ الأرضِ من أصلِ الشجرةِ إلى تلك النقطة لزيد . ومن تلك النقطةِ إلى طرفِ الظلِّ لعمرو . ومن طرفِ الظلِّ إلى ما يساوى ارتفاعَ تلك الشجرة لبكر . وهو نهاية ما يملكه من تلك الأرض . ثمَّ زالت تلك الشجرة . وخفى علينا مقدارُ الظلِّ ، ومسقطُ العصفورِ ، وأردنا أن نعرفَ مقدارَ حصّةِ كُلِّ واحدٍ لندفعها إليه . والفرضُ أنَّ طولَ كلِّ من الشجرة والظلَّ وُبُعْدِ مسقطِ العصفورِ عن أصلِ الشجرة مجهولٌ . وليس عندنا من المعلوماتِ شيءٌ سوى مسافاتِ طيرانِ العصفورِ . فإنَّها خمسةُ أذرعٍ . ولكنَّا نعلمُ أنَّ عددَ أذرعِ كلِّ من المقاديرِ المجهولةِ صحيحٌ لا كسرَ فيها .

وغرضنا أن نستخرجَ هذه المجهولاتِ من دون رجوعٍ إلى شيءٍ من القواعدِ المقررةِ فى الحساب من الجبر والمقابلة والخطأين وغيرهما ، فكيف السبيل إلى ذلك .

(أقول) هكذا وجدتُ بخطِّ والدى قدّس سره ، والظاهرُ أنَّ هذا السؤال له طاب ثراه .

ويخطُرُ ببالي أنَّ الجوابَ عن هذا السؤالِ أن يُقال : لمّا كانت مسافة الطيران وترَ قائمةٍ ، وكان مربّعُها مُساوياً لمجموعِ مربّعَي الضلعين بالعروس . فهو خمسةُ وعشرون ، وينقسمُ إلى مُربّعين صحيحين أحدهما ستة عشر . والآخر

المسألة الثانية :

الكشكول - طبعة مصر - الصفحتان ١٢٧ - ١٢٨ (الجزء الثانى) .

تسعة ، فأحد الضلعين المحيطين بالقاعدة أربعة ، والآخر ثلاثة ، والظل أيضا أربعة ، لأن ارتفاع الشمس ذلك الوقت في ذلك العرض خمسة وأربعون ، لأنه الباقي من تمام العرض ، وهو تسع وستون ، إذا نُقصَ منه أربعة وعشرون . أعني الميل الكلي ، وقد ثبت في محله أن ظل ارتفاع خمسة وأربعين لابد أن يساوي الشاخص ، فيظهر أن حصة زيد من تلك الأرض ثلاثة أذرع ، وحصة عمرو ذراع ، وحصة بكر أربعة أذرع ، وذلك ما أردناه .

ولا يخفى أن في البرهان على مساواة ظل ارتفاع به للشاخص نوع مساهلة أوردتها في بعض تعليقاتي على رسالة الاسطرلاب . لكن التفاوت قليل جدًا لا يظهر للحس أصلاً ، فهو كاف فيما نحن فيه . انتهى .

شرح المسألة الثانية : في هذه المسألة يُطلب تحديد أنصبة من الأرض بناء على معلومات معطاة مع الوفاء بشروط محددة . وبين شكل (١٩) توضيحاً هندسياً لهذه المسألة . ومنه يتبين لنا الآتي :

المثلث أ ب د مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين حيث إن شعاع الشمس يميل بزاوية قدرها ٥° على خط الأفق . كذلك فإن المثلث أ ب ح مثلث قائم معروف فيه الوتر وهو مسافة طيران العصفور وتساوي ٥ أذرع .

ولما كان السائل قد اشترط أن تكون الحصص أعداداً صحيحة . لذلك فإنه بالرجوع إلى المثلث القائم أ ب ح أن :

أ ح = مسافة طيران العصفور = ٥ أذرع .

ب ح = حصة زيد وهي مقدار مجهول ولكنه يُشترط أن يكون عدداً صحيحاً .

أ ب = ارتفاع الشجرة = طول الظل .

= مجموع حصتي زيد وعمرو وهو مقدار مجهول ولكنه عدد صحيح . لذلك

لا بد أن تكون الأضلاع الثلاثة للمثلث أ ب ح أعداداً صحيحة . وهذا لا يتأتى

إلا إذا كانت الأطوال ح ب ، ب أ ، أ ح تساوي ٣ ، ٤ ، ٥ أذرع على التوالي =



شکل (۱۹)

حيث إن مربع الوتر ($25=25$) يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين ($24 + 7$)

وبالتالى تكون الحصص على الوجه التالى :

حصّة زيد = ٣ أذرع

حصة عمرو = ٤ - ٣ = ١ ذراع

حصه بکر = ۴ اذرع

ومن الواضح أنها كلها أعداد صحيحة كما اشترط السائل .

[٣] « في معرفة ارتفاع المرتفعات من دون اسطرلاب :

تضع مرآة على الأرض بحيث ترى رأس المرتفع فيها ، ثم تضرب ما بين المرآة ومسقط حجره في قدر قامتك ، وتقسم الحاصل على ما بين المرآة وموقفك ، فالخارج ارتفاع المرتفع .

طريق آخر :

تنصب مقياسًا فوق قامتك ودون المرتفع ، ثم تبصر رأسها بخط شعاع ، وتضرب ما بين موقفك ومسقط حجر المرتفع في فضل المقياس على قامتك ، واقسم الحاصل على ما بين موقفك وقاعدة المقياس ، وزد على الخارج قدر قامتك ، فالمجتمع قدر ارتفاعه .

المسألة الثالثة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٢٣٣ (الجزء الثالث) .

في هذا الموضع من «الكشكول» يورد العامل طريقتين لتعيين ارتفاع المرتفعات دون الاستعانة بالأسطرلاب . يستخدم في إحدها مرآة تنعكس عليها صورة رأس المرتفع . بينما يستخدم في الأخرى شاخصًا أو مقياسًا . ويتم الرصد بحيث يمر شعاع البصر على رأس المقياس ورأس المرتفع في ذات الوقت . وقد سبق أن تناولنا هاتين الطريقتين بالشرح والتفصيل في الفصل الثاني من الباب السابع من كتاب «خلاصة الحساب» .

[٤] « في إجراء الماء من القنوات ، ومعرفة الموضع الذي يسير فيه على وجه الأرض :

تقف على رأس البئر الأول . وتضع العضادة على خط المشرق والمغرب .
ويأخذ شخص قصبةً يساوى طولها عمقه ، ويبعد عنك في الجهة التي تريد
سوق الماء إليها ناصباً للقصبة إلى أن ترى رأسها من ثقبتي العضادة . فهناك
يجرى الماء على وجه الأرض . وإن بُعدت المسافة بحيث [لا] ^(١) يرى رأس
القصبة ، فاشعل في رأسها سراجاً . واعمل ما قلناه ليلاً .

ولوزن الأرض طرق عديدة أشهرها ما أورده صاحبُ النهاية . وعسانا
نذكره في هذا المجلد من الكشكول .

المسألة الرابعة :

الكشكول - طبعة مصر - الصفحتان ٢٧٠ ، ٢٧١ (الجزء الثالث) .

(١) زبدت ليستقيم المعنى . ولا بد أنها سهو في النسخ .

تعقيب :

سبق أن تعرضنا لعملية وزن الأرض في الفصل الأول من الباب السابع ، ويُستعان في الطريقة المذكورة
بعضادة الأسطرلاب في عملية الرصد .

[٥] « إذا أردت إنشاء نهر أو قنّاق ، وأردت أن تعرف صعود مكانٍ على مكانٍ ، وانخفاضه عنه . فلك فيه طرق : »

أحدها أن تعمل صفحة من نحاسٍ أو غيره من الأجسام الثّقيلة ، وتضع على طرفيها لبنتين كما في عضادتي الاسطرلاب ، وفي موضعِ العمودِ منها خيطٌ دقيقٌ في طرفه ثِقالةٌ ، فإذا أردت الوزنَ أدخلت الصفحة في خيطِ طولُه خمسة عشر ذراعًا ، ولتكن الصفحة في طاقِ الوَسَطِ منه ، وطرفاهُ على خشبتين طولُ كُلِّ واحدةٍ خمسة أشبارٍ مُقَوَّمتين غايةً التقويم . بيد رجلين كل منهما في جهة ، والبعْدُ بينهما بقدرِ طولِ الخيطِ وأنت تنظرُ في لسانِ الميزانِ . فإذا انطبقَ على التّجَمِ ، فالأرضُ معتدلةٌ . وإن مالَ فالمائلُ عنها هي العليا ، وتعرف كمية الزيادة في العلو بأن تخطَّ الخيط على رأسِ الخشبةِ إلى أن يطابقَ النجم واللسان ، ومقدارُ ما نزل من الخيط هو الزيادة ، ثم تنقل إحدى رجلَي الميزان إلى الجهة التي تريد وزنها ، وتثبت الأخرى إلى أن يتمَّ العملُ ، وتحفظ مقدارَ الصُّعود بخيط على حدة ، وكذا مقدارَ الهبوط ، ثم يلى القليلُ من الكثير ، فالباقي هو تفاوتُ المكانين في الارتفاعِ ، وإن تساويا شقَّ نقلُ الماء ، وإن نزلت ما وقع إليها الثقل سهَّلَ ذلك . وإن علّت امتنع ، وقد يُستغنى عن الصفحة بالأنبوبة التي يصبُّ فيها الماء من منتصفها ، فإن قطرَ من طرفيها على السواء . أنبأ عن التعادلِ . وإلّا عَمِل كما عُرِف .

المسألة الخامسة :

الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٣١٧ (الجزء الثالث) .

يذكر العامل طريقة إيجاد فرق المنسوب (أى فرق الارتفاع) بين موضعين من الأرض باستخدام الصفيحة المثلثة ، كذا باستخدام أنبوبة بها ماء . وقد شرحنا هذه الطريقة بالتفصيل في الفصل الأول من الباب السابع من كتاب « خلاصة الحساب » .

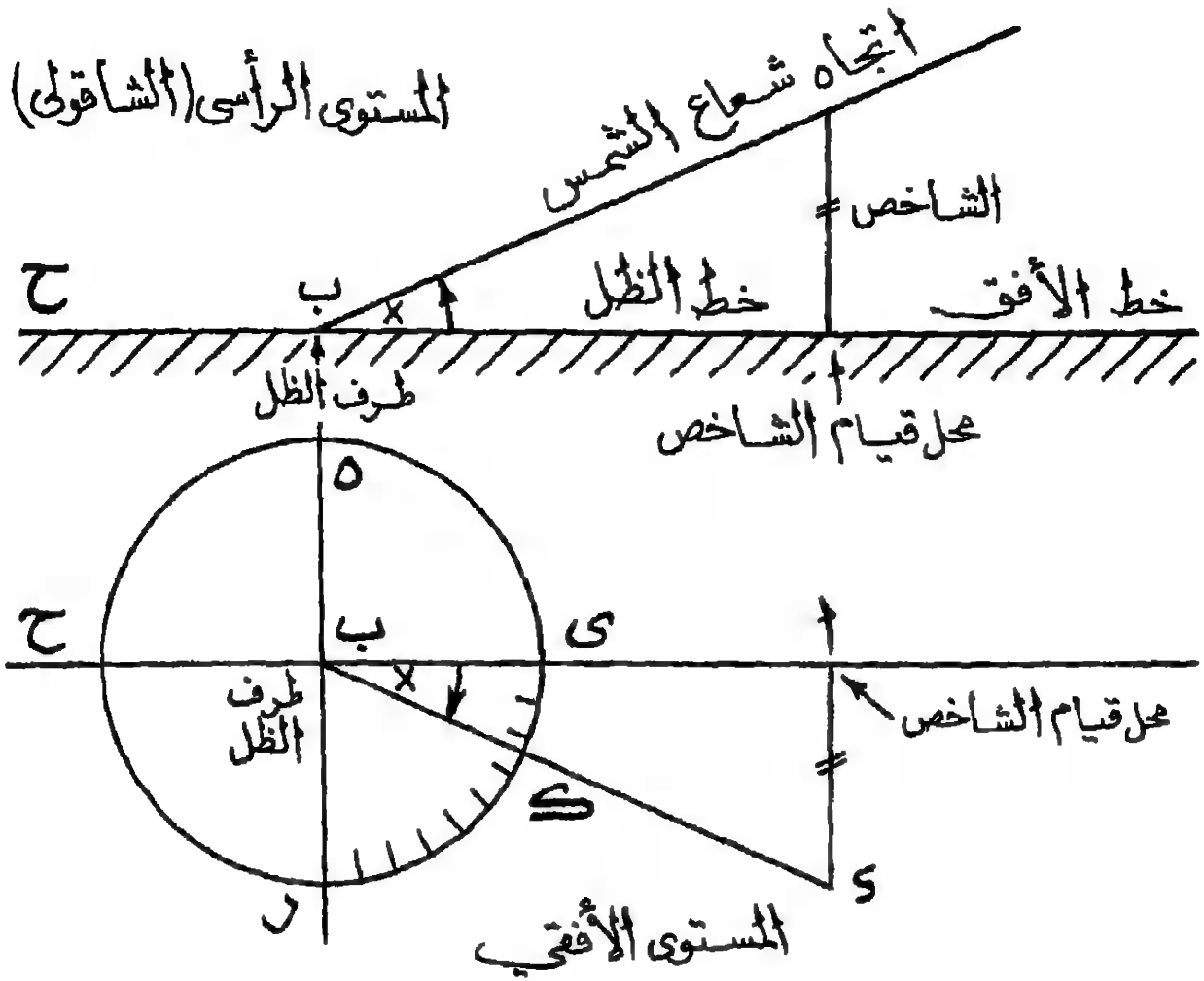
[٦] «إذا أردنا أن نعرف ارتفاع الشمس أبداً من غير اسطرلاب ، ولا آلة ارتفاع ، فإننا نقيم شاخصاً في أرض موزونة ، ثم نعلم على طرف الظل في ذلك الخط ، ونمد خطاً مستقيماً من محل قيام الشاخص يحرر على طرف الظل إلى مالا نهاية معينة له ، ثم نخرج من ذلك المحل على خط الظل في ذلك السطح عموداً طوله مثل طول الشاخص ، ثم نمد خطاً مستقيماً من طرف العمود الذي في السطح إلى طرف الظل ، فيحدث سطح مثلث قائم الزاوية ، ثم نجعل طرف الظل مركزاً ، وندير عليه دائرة بأى قدر شئنا . ونقسم الدائرة بأربعة أقسام متساوية على زوايا قائمة يجمعها المركز ، ونقسم الربع الذى قطعه المثلث من الدائرة بتسعين جزءاً مما قطعه الضلع الذى يوتر الزاوية القائمة من الدائرة مما يلي الخط والظل هو الارتفاع .

وليكن محل الشاخص نقطة (أ) وطرف الظل (ب) والخط المخرج (اح) والعمود في السطح (اد) و (أ) هى الزاوية القائمة والمستقيم الواصل بين طرف العمود وطرف الظل (دب) ، والمثلث (ابد) . ومركز الدائرة (ب) . والدائرة (ى رح ٥) ، والربع المقسوم بتسعين (ى ر) ، والضلع الموتر للزاوية القائمة من المثلث ضلع (بد) ، فإذا كان قاطعاً للرُبع على نقطة (ك) كانت قوس (ى ك) مقدار الارتفاع في ذلك الوقت من ذلك اليوم . وهذا مما بُرهن عليه ، لكن برهانه مما يطول ، ولا يتسع له الكشكول» .

المسألة السادسة :

الكشكول - طبعة مصر - الصفحتان ٣٢٩ - ٣٣٠ (الجزء الثالث) - وقد صححنا التحريف في الرموز الواردة في المتن .

شرح المسألة السادسة : يقدم العاملى هنا طريقة لتعيين ارتفاع الشمس بغير استخدام للاسطرلاب أو آلة ارتفاع . وتتلخص الطريقة في إقامة شاخص على أرض تامة الإستواء ثم تحديد طرف الظل . ويبين شكل (٢٠) تكون مثلث قائم الزاوية عند الشاخص ، نعلم منه ارتفاع الشاخص وطول ظله . وبالتالي فإن زاوية ميل شعاع =



شكل (٢٠)

طريقة لتعيين ارتفاع الشمس دون اسطرلاب أو آلة ارتفاع

الشمس تتخذ قيمة محددة ، ويرمى العامل إلى نقل المثلث القائم من المستوى الرأسى (الشاقولى) إلى المستوى الأفقى حيث يمكن قياس الزاوية المطلوبة ، وطريقة النقل هذه واضحة تمامًا في المتن بعد تصحيحنا للتحريف الذى ورد فى الرموز .

ويتضح من شكل (٢٠) أن المثلث المرسوم فى المستوى الأفقى ا ب د هو نفسه المثلث المكوّن من الشخص وظلّه وشعاع الشمس فى المستوى الرأسى . وبذلك تكون زاوية ميل الشعاع الشمسى عند ب موجودة فى المثلث المنشأ على الأرض ، ومن ثمّ يمكن قياسها . وبالتالي يتحدد ارتفاع الشمس ساعة القياس ، والبرهان على صِحّة ذلك واضح تمامًا من الشكل حيث إن المثلثين القائمين فى المستويين الرأسى والأفقى متطابقين تمام التوافق بتساوى الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة .

خلاصة

يُقدِّم لنا الشيخ بهاء الدين العاملي - العالم الموسوعي العربي - صورة واضحة ودقيقة لمعارف العرب الرياضية في حوالى نهاية القرن السادس عشر للميلاد وأوائل القرن السابع عشر إبان انتقال قصب السبق من الحضارة العربية إلى الحضارة الغربية . وقد ضمَّن العاملي هذه المعارف بعضَ قواعد وطرائق من ابتكاره . ولقد نجح في عرضه لموضوع الرياضيات هذا عرضاً غاية في العتیب والشمول لاسيما وأنه جاب الأمصار العربية والإسلامية واطلع على كثير من أعمال علماءها زهاء ثلاثين عاماً . فجاءت كتاباته مشتملة على ما ألمَّ به وأحاط في سياحاته واطلاعاته المرامية .

ويجدر بنا في ختام هذه الدراسة التي تناولت تحقيق كتاب « خلاصة الحساب » و « الكشكول » ، ودراسة رياضياتهما دراسة تحليلية ، أن نقدم خلاصة موجزة لما أورده العاملي في هذين المصنَّفين . ويشمل استخراج المجهولات بالطرق الحسابية . كما يضم خواص الأعداد . وجمع المتواليات ، واستخراج المجهولات بطريق الجبر والمقابلة . كذا بعض المسائل العويصة والمستحيلة الحل . وتتضمن كتابات العاملي كذلك إيجاد مساحة الأشكال الهندسية المستوية وحجوم الأجسام المنتظمة . وبعض المسائل التي تعرَّض في أعمال المساحة العملية .

أولاً : الطرق الحسابية الأساسية

١ - قواعد حساب الأعداد الصحيحة (الصُّحاح) من جمع وطرح وضرب وقسمة . مع بيان طرق الضرب المختلفة كطريقة الشبكة على سبيل المثال .

٢ - قواعد حساب الكسور من جمع وطرح وضرب وقسمة مع بيان تجنيس الكسور (توحيد المخارج أو المقامات) ورفعها .

٣ - ميزان العدد . أى طريقة امتحان صحة العمليات الحسابية المختلفة . وتُعرف هذه الطريقة بالقاعدة الذهبية ، وتُطلق تسمية الميزان على ما يبيى

من العدد أو من حاصل الجمع أو الطرح أو الضرب بعد إسقاطه تسعة تسعة .

٤ - طريقة إيجاد الجذر للعدد الصحيح وللكرسر ، وقد ذكر العاملى طريقةً مبتكرة لحساب جذر الأصمّ بالتقريب ، وتؤدى هذه الطريقة إلى نتائج لا يتعدى الخطأ فيها ١٪ ، وقد سبق للكرخى^(١) أن ضمّنها كتابه « كافى الحساب » .

٥ - استخراج المجهولات بطريق الحساب ، وتشمل الطرق التالية :

(أ) استخراج المجهولات بالأربعة المتناسبة ، وبالأربعة المتناسبة يقصد أربعة مقادير $ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ ، ع_٤$ بحيث تكون نسبة الأول إلى الثانى كنسبة الثالث إلى الرابع ، أى أن :

$$\frac{ع_٣}{ع_٤} = \frac{ع_١}{ع_٢}$$

ويُسمى المقداران $ع_١ ، ع_٢$ الطرفين ، بينما يُسمى المقداران $ع_٣ ، ع_٤$ الوسطين . ومن الواضح أن حاصل ضرب الطرفين يساوى حاصل ضرب الوسطين . وبمعلومية ثلاثة من هذه المقادير الأربعة يمكن حساب المقدار المجهول باستخدام معادلة التناسب فى أى من صورها المترادفة .

(ب) استخراج المجهولات بطريق حساب الخطأين

وقد كانت هذه الطريقة معروفة تمامًا ومنتشرة الاستعمال فى صدر الحضارة العربية ، وتعتمد هذه الطريقة على فرض قيمتين مختلفتين للمقدار المجهول ثم إيجاد الخطأين الناشئين عن هذين المفروضين .

(١) هو فخر الدين أبوبكر محمد بن الحسن الكرخى الحاسب وزير بهاء الدولة . صاحب كتابى « الفخرى » و « القافى » . وقد ألفهما بين سنتى ٤٠١ ، ٤٠٧ هـ (١٠١٠ - ١٠١٦ م) .

والتعويض في علاقة محددة لتخرج القيمة الصحيحة للمقدار المجهول .

(ج) استخراج المجهولات بالعمل بالعكس

وفي هذه الطريقة يبدأ حل المسألة من نهايتها حيث تجرى الخطوات بعكس ما يرد في متن المسألة حتى نصل بالتسلسل إلى قيمة المجهول .

٦ - كيفية استخراج الأسماء أو الشهور أو البروج المضمرة ، وذلك بتجميع معلومات من المضمير تؤدي إلى معادلة بسيطة ذات مجهول واحد . وبذلك يتحدد العدد الممثل للشيء المضمير .

٧ - فكرة التباديل والتوافيق كإيجاد عدد الكلمات التي تتركب من حروف الهجاء (حروف المعجم) بشروط خاصة ، كأن تكون الكلمة ثنائية ، أو أن تكون الكلمة ثلاثية بشرط عدم اجتماع حرفين من جنس فيها . وهكذا .

٨ - قسمة مال غير وافي بحقوق متفاوتة على حسب التفاوت ، أى بيان كيفية تقسيم مال موجود على جماعة من المستحقين تزيد استحقاقاتهم أو ديونهم على المال الموجود .

ثانيًا : خواص الأعداد

١ - تعريف العدد عمومًا ، كذا تعريف الأعداد المتماثلة والمتداخلة والمتوافقة والمتباينة .

٢ - الأعداد التامة والزائدة والناقصة ، والعدد التام هو ذلك العدد الذى يساوى مجموع الأعداد المكونة له ، وينتهى العدد التام دومًا بواحد فقط من أى من الرقمين ٦ ، ٨ في خانة الآحاد .

وهنا يشير العامل إلى قاعدة تختص بتعيين الأعداد التامة ، وهى قاعدة

ثبتت صحتها حتى البلايين على الأقل . وقد أمكن باستخدام هذه القاعدة تعيين الأعداد التامة السبعة الأولى .

- ٣ - بيان المقصود بالأعداد المتحابّة كالعديدين ٢٢٠ - ٢٨٤ حيث إن مجموع عوامل كل منهما يساوى مجموع عوامل الآخر . ويُقصد بعوامل العدد هنا جميع الأعداد التى يقبل القسمة عليها بدءًا من الواحد الصحيح .
- ٤ - ربط العاملى بين صفات آدم وحواء وبين خواص الأعداد .

ثالثًا : جمع المتواليات

قدم العاملى طرق إيجاد مجموع بعض المتواليات الرياضية نذكرها فيما يلى :

- ١ - جمع الأعداد على النظم الطبيعى . أى جمع المتوالية الحسابية التى أساسها الواحد . أى التى يزيد فيها كل حدًا عن سابقه بواحد صحيح :

$$(١ + ٢ + ٣ + ٤ + + ن) \frac{ن}{٢} = (١ + ن)$$

- ٢ - مضروب عدد فى نفسه وفى جميع ما تحته من الأعداد :

$$ن [١ + ٢ + ٣ + + (٢ - ن) + (١ - ن) + ن] \frac{ن^2}{٢} = (١ + ن)$$

- ٣ - جمع الأفراد (دون الأزواج) على النظم الطبيعى . أى جمع الأعداد المفردة حسب تسلسلها الطبيعى :

$$\left(\frac{١ + ن}{٢} \right) = [١ + ٣ + ٥ + ٧ + + (٢ - ن) + ن]$$

- ٤ - جمع الأزواج (دون الأفراد) على النظم الطبيعى . أى جمع الأعداد الزوجية حسب تسلسلها الطبيعى :

$$\left(1 + \frac{n}{2}\right) \frac{n}{2} = [n + (2 - n) + \dots + 8 + 6 + 4 + 2]$$

٥- جمع المُربَّعات المتوالية :

$$= [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2]$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3 \times 2 \times 1}$$

٦- جمع المُكعَّبات المتوالية :

$$\left[\frac{n(n+1)^2}{2} \right] = [1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3]$$

٧- أشار العامل إلى الأعداد المتوالية من الواحد على التضاعف ، أى جمع

المتوالية الهندسية التى أساسها ٢ ، وهى :

$$(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots)$$

$$\text{أى } (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots)$$

وفىها يكون كلُّ حدٍّ فى المتوالية مُساوياً للحد الذى يسبقه مضروباً فى ٢ ،

وقد أشار العامل إلى هذه المتوالية الهندسية فى معرض حديثه عن الأعداد

التامة .

هذا وقد سبق لأبى الريحان البيرونى (٩٧٣ - ١٠٥١ م) أن توصَّل

إلى إيجاد مجموع هذه المتوالية ، التى تُعرف بالنسبة الشطرنجية عطفاً على

قصة الحكيم الذى طلب مكافأته من الحاكم بحيث تساوى مجموع

ما يتحصل من وضع حبوب على مربعات رقعة الشطرنج بحيث تبدأ بحبة

واحدة فى المربع الأول ثم تزداد على التضاعف فى المربعات التالية حتى

المربع الرابع والستين وهو المربع الأخير فى رقعة الشطرنج ، ويبلغ مقدار

الحَبَّ المتحصل على رقعة الشطرنج - حسب المتوالية الهندسية التي أساسها
٢ - رقمًا بالغَ العِظَم سبق أن حسبه العلماء العرب^(١) وهو :

٦١٥ ٥٥١ ٧٠٩ ٠٧٣ ٧٤٤ ٤٤٦ ١٨

رابعًا : الجبر والمقابلة

١ - تعريف الشيء والمال والكعب ومراتبها . وهذه نُعَبِّرُ عنها بالرموز الرياضية
المعاصرة على الوجه التالى : س . س^٢ . س^٣ وما فوقها . أما العدد
فهو الذى لا يشتمل على الشيء أو المجهول .

٢ - بيان المقصود بكلمتى «جبر» و «مقابلة» حيث يُعَبِّرُ العاملى عن معنيهما
تعبيرًا دقيقًا فى الفصل الثانى من الباب الثامن من كتابه «خلاصة
الحساب» حيث يقول بلفظه :

«الطرف ذو الاستثناء^(٢) يُكْمَلُ ، ويُزَادُ مثل ذلك على الآخر ، وهو
الجبر» .

«والأجناسُ المتجانسةُ المتساويةُ فى الطرفين تُسْقَطُ منها ، وهو المقابلة» .

٣ - حل المسائل الجبرية الست ، أى حل معادلة الدرجة الثانية فى صورها
الست ، وهى ثلاث مسائل تُسمى المفردات . وثلاث أُخر تُسمى
المُقرنات ، وهى لا تخرج فى مجموعها عن جبر محمد بن موسى
الخوارزمى .

(١) راجع على سبيل المثال كتاب «مُرشد الطالب إلى أسى المطالب» للشيخ عبد الله العجمى الشنشورى .
مخطوط المكتبة الأحمديّة بعلب - رقم ١٢٤٢ : صفحة ٢٥ حتى ٢٦ ب .

(٢) يقصدُ الحدُّ الذى تسبقه إشارة سالبة . فيُضافُ مثلُ هذا الحدِّ نفسه ولكن بإشارة موجبة لكلِّ من طرفي
المعادلة .

(١) المفردات : وهى مسائل « المعادلة بين جنس وجنس » :

١ - عدد يعدل أشياء : ج = ب س

٢ - أشياء تعدل أموالاً : ب س = أس^٢

٣ - عدد يعدل أموالاً : ج = أس^٢

(ب) المُقترنات : وهى مسائل « المعادلة بين جنس وجنسين » . وفيها

يكون جنس فى أحد طرفى المعادلة يعدل جنسين (مقترنين) لهما نفس

الإشارة الجبرية فى الطرف الآخر من المعادلة :

١ - عدد يعدل أشياء وأموالاً : ح = ب س + أس^٢

٢ - أشياء تعدل عددًا وأموالاً : ب س = ح + أس^٢

٣ - أموال تعدل عددًا وأشياء : أس^٢ = ح + ب س

وقد أورد العاملى أمثلةً عديدة تطبيقاً على الحلول التى قدّمها

لهذه المسائل الجبرية الست .

٤ - تحويل الفرق بين مُربّعى مقدارين إلى حاصل ضرب مجموع المقدارين فى

الفرق بينهما :

$$(م^٢ - ن^٢) = (م + ن) (م - ن)$$

٥ - « المسائل السيّالة » وهى تسمية أطلقها العرب على المسائل التى ليست لها

إجابة وحيدة . أى المسائل التى يصحّ لها عدد غير محدود من الحلول

الممكنة . وقد أعطى العاملى مثلاً لذلك توصّل فيه إلى تعيين النسبة بين

المجهولين . وبالتالي يصير لهذه المسألة عدد لا نهائى من الأجوبة الصحيحة

كلّها تحقق النسبة التى تمّ تعيينها .

خامسًا : المسائل العويصة أو المستحيلة الحل

ساق العامل في خاتمة كتابه « خلاصة الحساب » سبع مسائل أسماها « المستصعبات السبع » ، وترجع الصعوبة أو الاستحالة في حلها إلى وقوعها في واحدة من المسائل الآتية :

١ - مُستصعبة تؤول المسألة فيها إلى مواجهة معادلة من الدرجة الثالثة ، وهذه ليست هيئة الحل كمعادلة الدرجة الثانية ، وقد سبق لبعض علماء العرب محاولة حل معادلة الدرجة الثالثة بالطرق الهندسية بواسطة قطوع المخروط . ومن أمثال من تصدّى لهذه المعادلة بالحل أبو عبد الله محمد عيسى الماهاني ، وثابت بن قرة الخراساني ، وأبو جعفر الخازن الخراساني ، والحسن ابن الهيثم ، وغياث الدين عمر بن إبراهيم الخيامي .

٢ - مُستصعبة تؤدي إلى معادلة من الدرجة الرابعة ، وقد سبق لأبي الوفاء البوزجاني أن توصل إلى حلول - بطرق هندسية - لبعض حالات من هذه المعادلة ، كذلك تضمنت مؤلفات عمر الخيامي معادلة من الدرجة الرابعة مع بيان حلّها .

٣ - استحالة تقسيم ضعف المربع إلى مربعين ، أى استحالة حل المعادلة :

$$2n^2 = n_1^2 + n_2^2$$

بشرط أن يكون كلٌّ من n ، n_1 ، n_2 عددًا صحيحًا . وهذه المسألة المستحيلة الحل سبق على ما عُرِف فيما بعد بنظرية « فيرما » نسبةً إلى العالم الرياضي الفرنسي فيرما (١٦٠١ - ١٦٦٥ م) .

٤ - استحالة تقسيم مكعب بمكعبين مكعبين . أى استحالة حل المعادلة :

$$n^3 = n_1^3 + n_2^3$$

حيث n ، n_1 ، n_2 أعداد صحيحة

وقد كانت هذه المسألة المستحيلة الحل معروفة عند عمر الخيامي ، وقد

يكون قد وقف عليها علماء عرب من قبله ، فهذه المستصعبة سبق آخر على ما ورد أيضًا في نظرية بيير دى فيرما التي جاءت بعد وفاة العاملى بنخمسة عشر عامًا ، والتي تقول :

«من المحال تقسيم المكعب إلى مكعبين ، أو ضعف المربع إلى مربعين ، أو بوجه عام تقسيم أية قوة أعلى من المربع إلى قوتين من نفس الدرجة .»

سادسًا : تعيين المساحات والحجوم

١ - تعيين مساحات الأشكال الهندسية المستوية ذات الأضلاع المستقيمة والمقوّسة .

٢ - حساب حجوم الأجسام الهندسية المنتظمة ذات الأسطح المستوية والأسطوانية والكروية .

سابعًا : أعمال المساحة العملية

١ - تحديد حصص من الأرض في ضوء معلومات مُعطاه ، مع استيفاء شروط معينة .

٢ - طرق قياس فرق المنسوب (أى فرق الارتفاع) عند موضعين من سطح الأرض (ويسمى العاملى عملية وزن الأرض) بقصد شق القنوات .

٣ - الطرق المختلفة لتعيين علو المرتفعات وأعماق الآبار .

٤ - قياس عروض الأنهار .

٥ - تعيين ارتفاع الشمس بغير الاستعانة بالاسطرلاب أو بآلة ارتفاع .

هذه نظرة فاحصة جامعة لما ضَمَّنَه العالمُ العربى الموسوعى بهاء الدين العاملى لكتابه «خلاصة الحساب» و «الكشكول» من رياضيات - عَرَضَ فيها لمعارف

العرب على عهده ، وقد جاب كثيرًا من الأمصار العربية والإسلامية ، ووقف على أعمال الكثيرين ممن تقدّمه من العلماء والفلاسفة . فلا غرو أن يطلع علينا بعرض شامل تمام الشمول ، مرتب غاية الترتيب ، دقيق كل الدقة ، مُمثلٌ أصدق تمثيل لما أَلَمَّ العرب به وأحاطوا في مجال الحساب والجبر والمساحة في نهاية القرن السادس عشر وبداية القرن السابع عشر للميلاد ، غداة انتقال الصدارة في التقدم الحضارى من الشرق إلى الغرب . وعرض العاملى هذا غنى بأوجه سبق العرب فى الرياضيات ، عامر ملىء بفضلهم فيها ، وما يدرسُ عالمُ أعمالِ العربِ ويتعمقُ ، ويخوضُ فيها ويتمعنُ ، إلّا ويخرجُ من دراسةٍ جادةٍ مُنصفَةٍ إلى أن رياضيات العرب هى - ولا شك - الأساس الذى عليه قامت الرياضيات الحديثة .

فهرس الأشكال

صفحة

- شكل (١) : الصفحة الأولى من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية
بجلب - رقم ١٧٧٣ . ٢٢
- شكل (٢) : الصفحة الثانية من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية
بجلب - رقم ١٧٧٣ . ٢٣
- شكل (٣) : الصفحة الأخيرة من خاتمة مخطوط مكتبة الأوقاف
الإسلامية بجلب - رقم ١٧٧٣ .
- شكل (٤) : الصفحتان الأولى والأخيرة من مخطوط المكتبة المولوية
بجلب - رقم ٧٥٣ . ٢٥
- شكل (٥) : الصفحة الأولى من مخطوط المكتبة الأحمديّة بجلب -
رقم ١٢٥٣ . ٢٦
- شكل (٦) : الصفحة (٥١) من مخطوط المكتبة الأحمديّة بجلب -
رقم ١٢٥٣ . ٢٧
- شكل (٧) : الصفحة (٢٦) من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية
بجلب - رقم ١٧٧٣ . ٨٧
- شكل (٨) : الصفحة (٢٧) من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية
بجلب - رقم ١٧٧٣ . ٨٨
- شكل (٩) : الصفحة (٢٨) من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية
بجلب - رقم ١٧٧٣ . ٨٩
- شكل (١٠) : الصفحة (٣٣) من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية
بجلب - رقم ١٧٧٣ . ٩٨
- شكل (١١) : تعيين ارتفاع مرتفع بالاستعانة بشاخص (برهان
العامل). ١٠١
- شكل (١٢) : تعيين ارتفاع مرتفع برصد رأسى المرتفع وشاخص . ١٠٢

- شكل (١٣) : تعيين ارتفاع مرتفع باستخدام مرآة مستوية ١٠٣
- شكل (١٤) : تعيين ارتفاع مرتفع بطريق قياس الظل ١٠٤
- شكل (١٥) : قياس عمق بئر باستخدام الأسطرلاب ١٠٦
- شكل (١٦) أ : الصفحة (٣٤) من مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب - رقم ١٢٥٣ ١١١
- شكل (١٦) ب : الصفحة (٣٥) من مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب - رقم ١٢٥٣ . ١١٢
- شكل (١٧) : مسألة الرمح المركوز في الحوض . ١٥٩
- شكل (١٨) : قاعدة في بيان تقسيم الغرماء : الصفحة (٥٢) من مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب - رقم ١٢٥٣ . ١٧٧
- شكل (١٩) : تحديد حصص من الأرض بشروط معينة . ٢٠٩
- شكل (٢٠) : طريقة لتعيين ارتفاع الشمس دون اسطرلاب أو آلة ارتفاع . ٢١٤